UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

POSGRADO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

ACERCAMIENTO EPISTEMOLÓGICO AL CÁLCULO FRACCIONARIO

TESIS PRESENTADA POR:

ADRIAN MUÑOZ OROZCO

PARA OBTENER EL GRADO DE: MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA: MATEMÁTICA EDUCATIVA

DIRECTORA DE TESIS: FLOR MONSERRAT RODRÍGUEZ

CODIRECTOR DE TESIS: MARTIN PATRICIO ARCIGA ALEJANDRE

JULIO 2018. MÉXICO

Dedicada a:

A mi hija Karen Muñoz Dorado.

Por ser ese motor que guía mi vida.

Agradecimientos

A mi familia

A mi madre, que siempre me ha brindado su apoyo

A mi hermana y mi padre, mis buenos consejeros

A Daysi Orozco, que siempre está para escucharme

A mis abuelos, por ser siempre ese ejemplo de perseverancia

A mis amigos

A Lizzet Morales, por su apoyo y consejos

A Camilo Rodríguez y Jonathan Cervantes, por su voz de aliento

A Sebastián Ordoñez, que me apoyo para iniciar esta meta

A mi asesora

Dra. Flor Rodríguez, por su buena orientación, correcciones y consejos

A personas participes de este proyecto

Dra. María Teresa González, por esas buenas sesiones discutiendo la metodología

Dr. Martin Arciga, por las discusiones del análisis

A mis revisores

Dr. José María Sigarreta y Dr. Armando Morales, por sus correcciones y valiosos aportes a este proyecto

A las entidades

A UAGro, orgulloso de ser parte de esta comunidad

A Conacyt, por el apoyo económico para sacar adelante esta maestría

Índice

Introducción

En las últimas tres décadas, la historia de la matemática como un recurso ha ido tomando fuerza en el ámbito de la Matemática Educativa, por su impacto tanto en la formación continua del profesor como en el aprendizaje del estudiante (Guacaneme, 2016; Jankvist, 2009). Reflejando la pertinencia y necesidad de realizar este tipo de estudios, para generar reflexión en el docente de matemáticas; y de conocer aspectos históricos que pueden ser llevados al aula de clase.

Particularmente, este trabajo se encuentra en el plano epistemológico y tiene como objetivo realizar un acercamiento epistemológico al cálculo fraccionario a través del análisis de una obra específica, esto para conocer las formas de su desarrollo y reflexionar en torno a su surgimiento, evolución y validación. Para ello, se presenta un análisis histórico sobre el cálculo fraccionario, que es conocido a partir de una generalización de algunas propiedades del cálculo convencional, es decir, en este cálculo se realizan derivadas e integrales de órdenes racionales, irracionales, reales y complejos, por ejemplo la derivada de orden un medio de una función cobra sentido (Sauchelli & Laboret, 2007). Adicionalmente, el cálculo fraccionario permite modelar distintos fenómenos relacionados con física mecánica, electromagnetismo, radiación, evolución de poblaciones, teoría de control, biología, entre otras, generando aproximaciones más cercanas con la realidad en comparación con modelos como el exponencial y logarítmico (Vázquez y Velazco, 2011).

El análisis histórico, tomó como referente principal la memoria de Liouville (1832a), la cual se caracteriza porque en ella se presentan las primeras definiciones de los conceptos asociados al cálculo fraccionario, y se dan a conocer las primeras aplicaciones de los mismos. Lo anterior, nos permite, dejar abierta la posibilidad de que en futuras investigaciones, se diseñen propuestas de enseñanza que involucren los aspectos epistemológicos descritos en esta investigación.

La tesis se estructura en cuatro capítulos, que se describen a continuación:

En el primer capítulo se reportan los antecedentes de la investigación, los cuales son el resultado de una amplia revisión y análisis de literatura sobre el tema a investigar. Este capítulo se divide en tres apartados: investigaciones en historia y epistemología y su relación con Matemática Educativa, investigaciones sobre la importancia de estudiar el cálculo fraccionario, e investigaciones sobre el desarrollo histórico del cálculo fraccionario. Finalmente, se muestran la pregunta, el problema general y los objetivos específicos de investigación.

En el segundo capítulo se reporta la metodología que guío este trabajo. En primer lugar se define la investigación histórica, y se precisa como ésta se auxilia del método de investigación histórico-lógico. Se describe en qué consiste este método y como se utilizó en la investigación. Además, se da respuesta a algunas de las categorías de análisis derivadas del método implementado.

En el tercer capítulo se presenta el análisis cualitativo de la obra de Liouville (1832a) considerando tres categorías de análisis: definiciones, teoremas y tipos de problemas; las cuales son construidas por el tipo de obra que se analizó. En el análisis se identificaron y se interpretaron una definición de derivada fraccionaria y dos ejemplos de la misma; un teorema y seis corolarios asociados a éste; y nueve problemas relacionados con geometría, electromagnetismo y física mecánica, de los cuales en este trabajo se interpretaron siete.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presentan las conclusiones considerando cinco aspectos: i) el alcance del objetivo de investigación, reflexionando sobre los aspectos teóricos y prácticos introducidos por Liouville (1832a) sobre el desarrollo histórico del cálculo fraccionario; ii) reflexiones epistemológicas en torno al surgimiento y desarrollo de la familia de conceptos asociados al cálculo fraccionario; iii) se reflexiona acerca de que en futuras investigaciones se pueda favorecer a la comunidad de Matemática Educativa y en específico a profesores; iv) discusión de los resultados de este trabajo con respecto a otras investigaciones y v) se presentan las implicaciones de este trabajo.

CAPÍTULO 1

Diseño de la investigación

Introducción

En este capítulo, en primer lugar se introduce al lector en los aspectos que motivaron esta investigación, reflexionando sobre el campo de impacto y dando a conocer algunos de los trabajos que se han realizado bajo el enfoque de la historia y epistemología de las matemáticas. Se parte de la premisa de que la historia de la matemática debe ser parte del conocimiento de la comunidad de Matemática Educativa; dado que, este conocimiento, permite saber más acerca los conceptos y de sus relaciones con otros conceptos. Asimismo se atiende una problemática común en este tipo de investigaciones, y es que en la enseñanza actual, los objetos matemáticos son presentados de forma acabada y terminada, alejados de un contexto y sin una razón de ser. En segundo lugar, se da una mirada global sobre el cálculo fraccionario, enfatizando en su potencial para modelar diversos fenómenos en diferentes disciplinas. Por último, se presenta una revisión de literatura sobre los trabajos realizados en historia del cálculo fraccionario. Lo anterior permitió delimitar el problema, la pregunta y los objetivos de investigación, además de situar el tema en el contexto de la literatura pasada y presente y sobre todo de la necesidad de realizar tal investigación.

1.1 La historia y la epistemología de la matemática en la Matemática Educativa

En esta sección se presentaran los aspectos que motivaron esta investigación desde dos perspectivas. En la primera se exponen algunas posturas sobre el porqué y el para qué un la comunidad de Matemática Educativa debe conocer acerca de la historia y epistemología de la matemática y se particulariza en la historia de la matemática como parte del conocimiento del profesor; y en el segundo se dan a conocer algunos estudios históricos y epistemológicos que permiten reflexionar sobre la génesis, evolución y validación de algunos conceptos matemáticos.

1.1.1 Perspectivas acerca de las contribuciones de la historia y epistemología de la matemática en la Matemática Educativa

Diversos investigadores en historia de la matemática y Matemática Educativa, han puesto en manifiesto los distintos campos de impacto de la historia en la enseñanza de las matemáticas (Sierra, 2000). Entre estos campos se destaca la incidencia sobre el profesor como un primer paso para impactar en el aprendizaje de las matemáticas. A continuación, presentaremos una serie de argumentos del porqué y para qué es importante y necesario que el profesor conozca de la historia de la matemática. Esto como un aspecto particular para justificar el aporte de la historia y epistemología en la Matemática Educativa.

Sierra (2000) analiza tres perspectivas de impacto de la historia de la matemática sobre la Matemática Educativa, las cuales son: evolución de conceptos y procedimientos, contexto socio cultural, y laboratorio para el desarrollo curricular; concluyendo que la exploración de la historia por parte del profesor le ayuda a enseñar temas del currículo. Sierra menciona que esto permite al docente dotar a sus prácticas de enseñanza de un carácter revulsivo contra el formalismo y el aislamiento del conocimiento matemático de las actividades humanas; dando a conocer a las matemáticas como una ciencia incardinada en diversas actividades culturales. También, le permite descubrir qué obstáculos, dificultades, errores y falsas creencias han tenido los matemáticos; los cuales pueden verse nuevamente reflejadas en los procesos de aprendizaje de sus estudiantes.

Arcavi (1991) expone dos beneficios de usar la historia en la Matemática Educativa, entre estos él destaca que si el profesor de matemáticas conoce acerca de historia, esto le permite tener una mejor sensibilidad para comprender las dificultades que tienen sus estudiantes cuando aprenden, lo que le puede dar indicios sobre cómo ayudarlos a superar dichas dificultades. Por ejemplo, cómo han evolucionado los estándares de rigor, lo que hoy puede considerarse un argumento matemático no riguroso fue ampliamente aceptado hace un tiempo. De esta manera es posible entender muchos de los argumentos dados por los estudiantes, que pueden ser válidos para ellos o para sus compañeros, aunque no lo sean en los estándares matemáticos actuales.

Arcavi e Isoda (2007) mencionan que la historia y particularmente el análisis de fuentes primarias, podría ser útil al profesor para aprender a escuchar a sus estudiantes de forma productiva, dado que les obliga a pensar cómo piensan los demás. Es decir, comprender lo que está detrás del pensamiento y acciones de los estudiantes sobre determinado conocimiento matemático, podría deducirse de la interpretación de estas fuentes.

Del Rio (1997) expresa que el conocimiento de la historia de la matemática proporciona una compresión más profunda de los conceptos y de los métodos matemáticos al desvelar sus orígenes. Permitiendo ver a la matemática como una ciencia viva, que surge de problemas de la humanidad, además de proporcionar algunos principios de cómo debe de enseñarse y de aprenderse.

Otras de las razones para investigar en historia de la matemática son las expuestas por la investigadora italiana Furinghetti (2007), quién alude que para aprender completamente matemáticas, se debe comprender por qué los objetos son como son y de dónde vienen. Específicamente menciona que el docente que conoce los aspectos históricos de las matemáticas podrá promover aspectos culturales y multidisciplinarios y verá la matemática como una actividad intelectual y no como un corpus de conocimiento o un conjunto de técnicas. Lo que contribuye a que se humanicen las matemáticas.

También, Jankvist (2009) menciona que la historia de la matemática, puede emplearse como herramienta didáctica influyendo de diferentes formas en el aprendizaje. Como por ejemplo: se contribuye con la motivación, ayudando a mantener el interés de los estudiantes y la emoción en el tema; interviene de forma cognitiva en el aprendizaje, ya que a los estudiantes se le presentan los contenidos de forma diferente, proporcionando un punto de vista alternativo; se ven las matemáticas más humanas y menos aterradoras; y por último se favorecen las etapas de aprendizaje ya que para aprender y dominar las matemáticas la mente debe pasar por etapas similares a las que han pasado los objetos matemáticos en su evolución.

Por último, destacamos las investigaciones de Arboleda (1984), Arboleda y Castrillón (2012), y Torres, Guacaneme y Arboleda (2014) quienes señalan que al introducir la historia de la matemática como parte del conocimiento del profesor, se logra desdogmatizar la enseñanza, potenciando aspectos alternos a los usuales respecto a las matemáticas y a los objetos matemáticos, contribuyendo a la comprensión de las particularidades de la actividad matemática en el aula, y en el desarrollo de competencias profesionales como la parte humanista o el mismo discurso matemático.

Como se puede evidenciar en las razones antes mencionadas, hay diversos motivos del para qué y por qué hacer investigaciones de corte histórico epistemológico enfocadas hacia el profesor de matemáticas. Así, estos argumentos serán nuestro punto de partida para realizar esta investigación, que además nos permite precisar la pertinencia de realizar un estudio bajo este enfoque.

Por otro lado, el aporte de la historia y epistemología de la matemática a la comunidad de Matemática Educativa puede verse reflejado en el conocimiento del profesor, aspecto que no validará en este trabajo. Sin embargo, se consideró pertinente profundizar un poco más al respecto, esto con fines de reflexionar un poco más acerca del impacto de éste tipo de investigaciones.

Para hablar acerca del ámbito de acción de la historia de las matemáticas en el conocimiento del profesor, es importante traer a colación el siguiente argumento

> *"Los efectos que la HM produce sobre las concepciones de los profesores de Matemáticas; el aporte que la HM hace a los conocimientos, destrezas o competencias de los profesores; los modos en que una fundamentación en HM afecta la acción educativa del profesor de Matemáticas; o, el tipo de reflexiones que se generan en/desde/para la práctica docente a partir de la consideración del discurso de la HM" (Guacaneme, 2016, p.23).*

Esto nos lleva a pensar que el impacto de la historia de la matemática sobre la labor del profesor es bastante significativa, ya que se logra integrar distintos elementos en las prácticas profesionales del profesor. Para aclarar un poco más acerca de esta cuestión consideramos pertinente revisar algunos modelos que tratan de describir las componentes del conocimiento de profesores, partiendo del modelo de Shulman (1987).

Shulman (2001) menciona siete categorías bases de los conocimientos de un profesor: conocimiento de la materia impartida; conocimiento pedagógico general, conocimiento del currículo, conocimiento de los educandos y de sus características; conocimiento de los contextos educacionales; y por último conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educacionales, y de sus fundamentos filosóficos e históricos.

En este sentido, consideramos que la historia aporta al conocimiento del profesor principalmente en el conocimiento de la materia impartida, dado que le permite saber cómo se desarrollan los conceptos, las épocas de estancamiento, los periodos y culturas donde se desarrolló, las dificultades por las que pasaron los matemáticos de la época, los errores cometidos por matemáticos, entre otros aspectos. El profesor tendrá así una visión más amplia de la materia que va a enseñar, fortaleciendo su formación profesional. También, consideramos que puede aportar al conocimiento del currículo, debido a que el profesor reconoce la forma secuencial en la cual se fueron desarrollando los conceptos. Finalmente, creemos también que la historia de la matemática puede aportar al conocimiento pedagógico de la materia ya que el estudio histórico le permite una mejor compresión de las matemáticas.

Esta postura puede verse aún más ampliada, respaldada y mucho mejor estructurada en el trabajo de Guacaneme (2016) quien distingue el impacto de la historia de la matemática no solo desde la perspectiva de Shulman (1987) sino desde el modelo de Grossman (1990) y de lo cual él concluye

> *"desde nuestra interpretación de los planteamientos estudiados de Shulman y Grossman, consideramos que sus propuestas de componentes del conocimiento del profesor incorporan necesariamente el conocimiento histórico de la disciplina como parte fundamental del conocimiento disciplinar, pero no de los demás componentes. Sin embargo, queremos reseñar que una mirada a sus planteamientos nos permite advertir que el conocimiento pedagógico general y el conocimiento del contexto son componentes mucho más trasversales a la formación de cualquier profesor que el conocimiento disciplinar y el pedagógico del contenido; en efecto, estos últimos tienen un alto grado de especificidad relativo a la disciplina particular. Así, consideramos conveniente reconocer el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico de las Matemáticas (o conocimiento didáctico de las Matemáticas) como componentes específicos del conocimiento del profesor de Matemáticas, en tanto el conocimiento pedagógico general y el conocimiento del contexto como componentes no específicos; ello, de manera alguna pretende subvalorar estos dos últimos componentes así como tampoco desconocer la posibilidad de que estos*

tengan un cierto nivel de particularidad relativo a la disciplina"
(Guacaneme, 2016, p.27).

En síntesis, podemos ver que la historia de la matemática aporta de manera significativa al conocimiento del profesor como se puede apreciar en los argumentos anteriores. Lo cual, da una perspectiva del por qué realizar investigaciones bajo este enfoque.

1.1.2 Investigaciones en historia y epistemología, aportes a la comunidad de Matemática Educativa

En esta sección reportamos algunos trabajos en historia y epistemología de la matemática en los cuales, se dan a conocer la génesis y desarrollo de algunos conceptos matemáticos y se reflexiona sobre su aporte en la comunidad de Matemática Educativa. Estos estudios se reportan con el objetivo de profundizar sobre la pertinencia de éste tipo de investigaciones.

En Guacaneme (2016) se trata de determinar el potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción, contenida en el Libro V de los Elementos, en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas. Para llevar a cabo lo anterior, en primer lugar Guacaneme realiza un estado de arte sobre la reflexión e investigación en torno a la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática", con el propósito de reconocer qué posturas han tomado diversos investigadores respecto al tema, y a partir de esas posturas construir un marco conceptual que sustente la investigación y que además le permitan diseñar unas categorías para analizar el Libro V de los Elementos.

Del trabajo realizado por Guacaneme (2016) destaca, como una de sus conclusiones, que los estudios realizados bajo el enfoque con el que se realiza nuestra investigación "pueden aportar a cualificar y mejorar los modelos del conocimiento del profesor que se han propuesto desde la investigación y que no incorporan sustancialmente el componente histórico" (p.378). Asimismo, se hace hincapié que desde esta investigación podemos reconocer algunas estrategias metodológicas para llevar estudios de este tipo, así como un respaldo teórico desde la Matemática Educativa para realizar este tipo de trabajos.

Bajo este mismo enfoque de investigación, pero centrándose particularmente en el conocimiento didáctico de profesores de matemáticas, Mora, Guacaneme y Jiménez

(2016) realizan un estudio con el objetivo de profundizar sobre el conocimiento histórico en la constitución de una visión sobre la naturaleza de la Aritmética y el Álgebra en maestros de matemáticas en formación, mediante la descripción de dicha historia y el análisis de cómo ésta se incorpora a la formación del conocimiento didáctico del contenido matemático. Además, presentan tres tareas que reflejan el análisis expuesto. Este estudio nos brinda una nueva perspectiva, mostrándonos que este tipo de investigaciones no solo realizan aportaciones en cuanto al análisis epistemológico, sino que pueden contribuir al diseño de tareas a partir de dicho análisis.

Otro estudio el cual nos parece pertinente enunciar en esta revisión de literatura. Es el realizado por Jankvist, Mosvold, Fauskanger, Jakobsen (2015) quienes en su trabajo analizan tres casos clásicos del uso de la historia de la matemática en la formación de maestros, reinterpretándolos bajo el marco del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT). Además, en este trabajo los autores mencionan que el marco MKT proporciona un poderoso lenguaje para comunicar los resultados de la investigación sobre los usos de la historia de la matemática en la enseñanza.

De esta investigación, destacamos las distintas perspectivas de análisis como el modelo de Shumal (1987), Grosman (1990) o el MKT desde los cuales se pueden observar el aporte de la historia a la formación continua o inicial de profesores de matemáticas. Asimismo, este trabajo nos muestra que la contribución de la historia de la matemática al conocimiento del profesor no es algo nuevo, y lleva ya un recorrido que se va fundamentando día a día.

Kjeldsen y Lützen (2015) presentan la historia del concepto de función, profundizando en problemas de física, los cuales han incidido en cambios esenciales en su definición y aplicación. Con el objetivo de brindarles a los maestros una herramienta, en la que se enseñen las matemáticas tal como ocurre en las ciencias. Argumentando que el desarrollo en la comprensión del estudiante, se realiza incorporando conceptos matemáticos y teorías, dentro de un marco explícito-reflexivo, en un rico contexto histórico, enfatizando en su interacción con otras disciplinas como la física.

Debnath (2015) realiza un estudio histórico sobre los números e, i y γ, considerando sus aplicaciones en álgebra, geometría, física, química, ecología, negocios e industria; prestando especial atención a los fenómenos de crecimiento y decaimiento en muchos problemas del mundo real. Adicionalmente, en este trabajo se presentan ejemplos de aplicaciones específicas y modernas de logaritmos, números complejos y funciones exponenciales complejas, a circuitos eléctricos y sistemas mecánicos. El principal objetivo de este trabajo es proporcionar información básica, a través del enfoque histórico de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sobre los conocimientos fundamentales y las habilidades necesarias para los estudiantes y profesores de todos los niveles, para que puedan entender los conceptos de matemáticas y la educación matemática en la ciencia y la tecnología.

En consecuencia los trabajos de Guacaneme (2016), Mora, Guacaneme y Jiménez (2016), Jankvist et al. (2015), Kjeldsen y Lützen (2015) y Debnat (2015) muestran la pluralidad de trabajos de corte histórico con el objetivo de contribuir al comunidad de Matemática Educativa, particularmente en los profesores y a la mejora de sus prácticas de enseñanza, dotándoles de una herramienta importante en su formación y es el conocimiento de la historia de un determinado objeto matemático. Lo cual, como se ha mencionado con anterioridad contribuye a la mejora sus prácticas de enseñanza influyendo directamente en el aprendizaje de sus estudiantes. Por otra parte, estas investigaciones muestran que desde el campo de la Matemática Educativa hay preocupación por realizar trabajos de corte histórico y epistemológico.

1.2 Importancia del cálculo fraccionario en distintas áreas de conocimiento

El tema sobre el cual pretendemos realizar esta investigación es el cálculo fraccionario conocido como una extensión del cálculo convencional. Es decir, en el cálculo convencional usualmente se realizan integrales y derivadas de orden entero, pero en este nuevo campo se consideran derivadas e integrales de orden fraccionario, irracional y hasta complejo. Uno de los aspectos interesantes de esta extensión es que permite una modelación más cercana de aspectos inmersos en la física, la economía, crecimiento de poblaciones y problemas de radiación. Estos aspectos pueden verse en parte validadas en la siguiente revisión de literatura.

Sauchelli y Laboret (2007) realizan una investigación sobre el cálculo fraccional aplicado al control automático, que consiste en la realización digital de un controlador PID con derivador de orden fraccional por el método de Al-Alaoui, que ha demostrado ser una de las mejores aproximaciones al aplicarlo a una planta no lineal con parámetros variables y manipulador robótico con carga variable en su extremo. Para ello, realizan un estudio de los distintos conceptos comprendidos por el cálculo fraccionario y su relación con las aplicaciones al control automático, ya sean analógicas o digitales, especialmente de Laplace al dominio discreto, resultando una función de transferencia discreta de dimensión infinita que mediante técnicas de expansión continuada en fracciones y posterior truncado, resulta en buenas aproximaciones de forma IIR y de órdenes razonables para operar en tiempo real. Del trabajo Sauchelli y Laboret (2007) destacamos que nos brinda la posibilidad de no sólo considerar el cálculo fraccionario como instrumento de modelación, sino como una herramienta que hace posible la innovación tecnológica.

Vásquez y Velazco (2011) presentan un trabajo en el cual exponen una panorámica de los fundamentos del cálculo fraccionario y sus aplicaciones para generar nuevos escenarios de modelización matemática, resaltando el papel de las nuevas familias de ecuaciones y funciones, las cuales ofrecen un contexto natural para la modelización de fenómenos asociados a efectos no locales en el espacio y de memoria en el tiempo. En consecuencia, este trabajo permite observar el cálculo fraccionario desde una mirada actual, en relación con las últimas posturas teóricas empleadas. Además, en este trabajo se hace evidente la utilidad de este objeto para modelar en una forma más concreta fenómenos asociados a distintos campos como la física, la economía, problemas de poblaciones, entre otros.

En esta misma dirección, Lombardero (2014) expone una investigación con el objetivo de estudiar la segunda ley de Newton desde una perspectiva más amplia, en comparación con lo usualmente empleado, utilizando conceptos del cálculo fraccionario. Para llevar a cabo este estudio, se plantea que el cálculo fraccionario permite extender los conceptos de derivada o integral a órdenes no enteros, lo cual a su vez permite analizar la segunda ley de Newton sustituyendo la derivada de segundo orden por una derivada de orden α, tal que α pertenece al intervalo $(1.5, 2)$. Además, esta idea puede ser ampliada a otros conceptos físicos como el péndulo, proyectil o resortes. En este sentido, el estudio realizado por Lombardero se vincula con nuestra investigación mostrando la utilidad del cálculo fraccionario como un instrumento de modelación, que permiten en gran medida obtener mejores aproximaciones que con otros objetos matemáticos usualmente trabajados.

Por último Tejado, Vinagre, Torres, López, Villalobos, Testi y Podluny (2015), presentan una estudio con el objetivo de analizar el comportamiento analítico y gráfico de la velocidad de las pulsaciones de calor, emitidas por dos sensores que detectan un cambio de temperatura en un sistema, utilizando conceptos de cálculo fraccionario, para así, obtener una mejor modelización de los datos registrados. Por lo tanto, este estudio se caracteriza por desprenderse de las ecuaciones diferenciales usuales y abordar un nuevo campo de las matemáticas para modelar un fenómeno termodinámico, de tal forma que los modelos obtenidos se ajustan en gran medida al fenómeno físico estudiado.

Por lo tanto, las investigaciones de Sauchelli y Laboret (2007), Vásquez y Velazco (2011), Lombardero (2014) y Tejado et al. (2015) nos muestra la pertinencia de investigar en el cálculo fraccionario, debido a la posibilidad de aplicación de este objeto a otros campos del conocimiento, al modelar un fenómeno o en la construcción de un instrumento tecnológico. Además, estas investigaciones permiten conocer un poco más acerca de los constructos teóricos en los cuales se encuentra fundamentado actualmente el cálculo fraccionario.

Otro de los aspectos que motivan la elección del cálculo fraccionario como tema de investigación; es que desde la Matemática Educativa se reporta pocos trabajos en torno a la enseñanza y aprendizaje de conceptos asociados a este campo de las matemáticas, tal situación puede ser aseverada basada en una revisión de la literatura en bases de datos tales como: ISI Web of Knowledge, Latindex, Ebsco, entre otras. Aunque, se han encontrado algunas ponencias en congresos de Matemática Educativa, en las cuales se aboga por investigaciones que incursionen en la enseñanza-aprendizaje de conceptos asociados al cálculo fraccionario (Torres y Brambila, 2016); en lo fundamental, debido a sus alcances teóricos-prácticos.

Finalizando, con que el cálculo fraccionario es un campo de investigación que se encuentra creciendo desde la Matemática, por las virtudes antes mencionadas, y realizar un estudio de corte histórico contribuye a conocer acerca de su epistemología, línea de interés de la Matemática Educativa. Además, de que este tipo de investigaciones contribuyen a la Matemática Educativa por las razones dadas en la sección anterior, ya que el cálculo fraccionario es un tema escolar y hace parte de líneas de investigación de posgrados mexicanos, como por ejemplo la maestría de Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Guerrero.

1.3 Investigaciones de corte histórico epistemológico del cálculo fraccionario

Se realizó una búsqueda de investigaciones que aborden el desarrollo histórico del cálculo fraccionario, fuentes segundarias (son fuentes que muestran el desarrollo histórico de un concepto pero no tienen relación con directa el mismo), con el objetivo de identificar qué trabajos se habían realizado en este campo, las cuales se registra. Además, esta búsqueda permitió identificar los aspectos más relevantes en el desarrollo histórico de los conceptos asociados a este cálculo, los matemáticos más influyentes, los periodos de tiempo más representativos y bibliografía de las fuentes primarias (documentos que retratan el desarrollo histórico de un concepto y tienen relación directa con el suceso estudiado).

Oldham y Spanier (1974) presentan el primer libro dedicado solamente al cálculo fraccionario, con el objetivo de estudiar los aspectos teóricos y prácticos de los métodos de modelación matemática de sistemas no lineales de cálculo. Para esto, en primer lugar realizan una revisión histórica de conceptos asociados al cálculo fraccionario, enfocándose en las contribuciones de L'Hôpital (1661-1704), Leibniz (1646-1716), Abel (1802-1829), Riemann (1826-1866), Liouville (1809-1882), entre otros matemáticos del siglo XIX; pasando a la axiomatización del cálculo convencional, y del cálculo fraccionario, estableciendo relaciones y diferencias entre estos; continuando con las propiedades generales del cálculo no convencional y algunas representaciones de funciones no trascendentes; y finalizando con algunas aplicaciones de este nuevo campo mediante la modelación matemática, en fenómenos informáticos y de agrupamiento de circuitos eléctricos. En consecuencia, este libro es considerado el primer libro en realizar un estudio histórico de los primeros constructos del cálculo fraccionario (aunque no hace un estudio a profundidad), asimismo, como uno de los primeros estudios que presentan este objeto matemático como un instrumento de modelación.

Ross (1997) da a conocer el desarrollo del cálculo fraccionario entre 1695 y 1900 enfatizando en las contribuciones de L'Hôpital, Leibnitz, Lacroix (1765-1843), Abel, Liouville y Riemann. Entre los aportes de cada uno de estos matemáticos se destacan: que L'Hôpital y Leibniz fueron los primeros en plantearse la posibilidad de que el orden de una derivada fuese un número racional; Lacroix fue el primero que presentó una definición formal acerca del cálculo fraccionario; Abel fue el primer matemático que dio a conocer una aplicación de éste objeto matemático, mediante la solución de la ecuación integral que surge en la formulación del problema tautochronous (isócrono); y finalmente Liouville y Reimann quienes son considerados como los matemáticos que mayores aportes han realizado sobre este objeto, dado que brindaron nuevas definiciones sobre el cálculo fraccionario dotándolo de nuevos fundamentos teóricos. Por otro lado el autor, destaca que uno de los aspectos que dieron origen a este concepto fue la curiosidad académica de la ampliación de las matemáticas.

Sánchez (2011) presenta un artículo con el objetivo de describir la evolución histórica del cálculo fraccionario a través de tres etapas, partiendo desde su nacimiento meramente teórico e intuitivo a finales del siglo XVII, pasando por los formalistas del siglo XIX donde se produjo una carrera vertiginosa por establecer y definir una teoría consistente de forma definitiva, hasta la aplicación de este objeto en diferentes disciplinas científicas en el siglo XX. Así, el artículo de Sánchez brinda una mirada global de los sucesos que incidieron en el desarrollo del cálculo fraccionario, lo cual nos permite identificar en cada una las etapas mencionadas como el concepto en cuestión fue evolucionando en su formalismo; las problemáticas asociadas a su formalización; qué matemáticos fueron los primeros que investigaron en este campo; y cuáles fueron las primeras publicaciones acerca de esta temática.

De igual manera Guía-Calderón, Rosales-García, Guzmán-Cabrera, González-Parada, y Álvarez-Jaime (2015) presentan un estudio con el propósito de dar a conocer los orígenes y el desarrollo del cálculo fraccionario, con la finalidad de motivar a los futuros investigadores mexicanos a incursionar en esta área tan interesante del cálculo no convencional. Así, el estudio de Guía-Calderón y colaboradores se caracteriza por abordar fuentes primarias en su investigación como: la memoria de Liouville *Mémoire sur questions de Geométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quesions* escrita en 1832; la publicación en 1969 “Elasticità e Dissipazione” escrita por Caputo; la obra de Lacroix *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* presentada al público en 1819; entre otras. Además, muestran un ejemplo en el cual se analiza el movimiento vertical de una partícula en el seno de un medio donde la resistencia es proporcional a la velocidad. Por otra parte, esta investigación hace hincapié sobre la necesidad de investigar sobre este nuevo objeto matemático en México; el cual es un campo que ofrece nuevas perspectivas y diferentes modelos teóricos, respecto al cálculo convencional.

En este sentido, la investigaciones de Oldham y Spanier (1974), Ross (1997) Sánchez (2011), y Guía et al. (2015) se constituyen en uno de los puntos de partida de nuestra investigación, puesto que nos permiten identificar y precisar las fuentes primarias que hacen posible un estudio histórico del cálculo fraccionario. Además, nos brindan una perspectiva global de los aspectos más relevantes que incidieron en el origen del objeto en investigación. Particularmente, estas investigaciones nos permitieron identificar las memorias escritas por Liouville en 1832 como fuentes primarias relevantes para llevar a cabo este análisis histórico epistemológico.

1.4 Problemática de investigación

Una de las problemáticas asociadas al campo de la Matemática Educativa es la descontextualización del objeto matemático con su propia génesis. En relación con esto Nolla (2006) señala, que si en la enseñanza de las matemáticas, los objetos son presentados de esta forma acabada y terminada, se desprecia los sucesos que incidieron en el desarrollo de un de objeto matemático; también se genera desconocimiento de que las matemáticas son una ciencia que surgió por las necesidades culturales del hombre, de la solución de problemas de distintos tipos y de la aplicabilidad de la misma en un contexto determinado. Es decir, que en la Matemática Educativa actual, los objetos matemáticos son presentados a los estudiantes como algo ya terminado y netamente formal, como si se tratara de un simple resumen de los conocimientos más desarrollados en la ciencia (Lupiáñez, 2002; Anacona, 2003; González, 2004, Cantoral & Farfán, 2004).

Ligado a la problemática anterior, pero en un papel secundario también se precisa que el profesor no sólo debe conocer de matemáticas para impartir sus clases, sino también debe tener sentido mismo de la evolución del pensamiento matemático (D'Amore, 2007). A lo cual Vasco (2002) señala que es necesario por parte del profesor de matemáticas que exista una preparación en historia de la matemática, ya que hay muy pocos preparados en este campo, así no sea en profundidad, es necesario un acercamiento a pequeños episodios históricos. Asimismo, si se pretende incluir la historia de la matemática cómo un recurso didáctico es necesario que los profesores de matemáticas conozcan acerca de la historia del concepto matemático que pretenden enseñar (González, 2004; D'Amore, 2007).

En consecuencia, la meta de esta investigación en contribuir a la epistemología del cálculo fraccionario, esto como un primer paso para contribuir a la problemática antes mencionada. Particularizando en la obra de Liouville (1832a); debido a, que esta obra es considerada importante en el desarrollo histórico de este cálculo, dado que en está se presentan las primeras definiciones y se da la primera aplicación del mismo. Esto porque, en las fuentes consultadas en la revisión de la literatura no hay una suficiente precisión acerca de las definiciones presentadas y cómo las desarrolló, así como los contextos en los cuales se dio la aplicación y como la sustentó, además no hay reflexiones epistemológicas sobre el cálculo fraccionario.

Así la pregunta conductora de esta investigación es la siguiente

¿Cuáles fueron los aportes teóricos y prácticos introducidos en la obra de Liouville (1832a), al desarrollo del cálculo fraccionario?

1.4.1 Objetivos de investigación

Se realizará un análisis histórico sobre el cálculo fraccionario, particularizando en Liouville (1832a), enfocado en reconocer elementos teóricos y prácticos para contribuir tanto a la epistemología de este cálculo, como al conocimiento de profesores universitarios; así, como indagar y dar a conocer los tipos de problemas que dieron origen a esta familia de conceptos. En consecuencia nos hemos planteado el siguiente objetivo general

- Realizar un análisis epistemológico del cálculo fraccionario particularizando en el trabajo de Liouville (1832a).

Para desarrollar este objetivo nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Dar a conocer los aspectos que dieron origen al cálculo fraccionario de 1695 a 1832 basado en fuentes secundarias.
- Analizar y describir los elementos teóricos y prácticos introducidos en la obra de Liouville (1832a).
- Describir los aportes de Liouville (1832a) al cálculo fraccionario.

CAPÍTULO 2

Metodología

Introducción

En este capítulo se presenta la metodología empleada en este estudio. Se usó el método de investigación histórico-lógico, que es usualmente empleado en investigaciones de historia de la Educación Matemática. Consideramos pertinente utilizar este método para esta investigación, debido a la naturaleza del objetivo de investigación.

El capítulo se divide en tres apartados. En el primero se define a la investigación histórica desde la perspectiva de Fox (1981) y Cohen y Manion (2002), y se dan a conocer algunas de las investigaciones que han utilizado el método de investigación histórico-lógico. En el segundo apartado se exponen las cuatro fases del método de investigación histórico-lógico desde la perspectiva Cohen y Manion (2002) y cómo se emplearon en esta investigación; particularmente, se hará énfasis en la tercera fase de este método, ya que se recurrirá a dos propuestas metodológicas auxiliares (Rodríguez, 2010; Kuckartz, 2014) que permitirá un análisis más profundo de los datos obtenidos. Finalmente, en el tercer apartado se atenderán a algunas de las categorías de análisis creadas a partir de la implementación del método de investigación histórico-lógico.

2.1 La investigación histórica en Matemática Educativa

En los últimos años la investigación histórica ha ido tomando fuerza en el ámbito de la Matemática Educativa, no sólo por su aporte al conocimiento del profesor y a los estudiantes, sino en general por sus aportes epistemológicos en la disciplina. Esto ha provocado el surgimiento de métodos de investigación que guían este tipo de estudios, por ejemplo el método de investigación histórico-lógico, el método historiográfico o el histórico crítico (Ruiz, 1976; Aróstegui, 2001; Cohen y Manion, 2002; González, 2009).

La investigación histórica en educación es comprendida por Fox (1981) como una labor útil que se caracteriza por tratar de aclarar problemas de interés actual mediante el estudio de fuentes ya existentes. Destacando, que el planteamiento más empleado es descubrir materiales desconocidos por las generaciones precedentes, pero el aspecto más importante es la reinterpretación de los acontecimientos a la luz de las nuevas técnicas e informaciones donde el investigador debe tener la flexibilidad suficiente para estudiar el pasado yendo en contra del presente, y ser capaz de descubrir nuevas relaciones o explicaciones que existen en las fuentes encontradas. También es definida por Cohen y Manion (2002) como la situación, evaluación y síntesis de la evidencia sistemática y objetiva con el fin de establecer los hechos y extraer las conclusiones acerca de acontecimientos pasados.

Particularmente, el método de investigación histórico ha sido empleado por investigadores en el campo de Educación Matemática con diferentes objetivos, para llevar a cabo estudios de corte histórico como se evidencia en investigaciones como las de:

González y Sierra (2003), González (2002) y González (2009) presentan una serie de investigaciones en historia de la educación matemática, particularizando en la didáctica del análisis matemático, con el objetivo de dar a conocer el método de investigación histórico y analizar el tratamiento que se le daba al concepto de punto crítico desde un punto de vista histórico.

También, Maz (2005) presenta un estudio sobre los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX. Con el propósito de establecer el tratamiento didáctico que se le daba a este concepto en los libros de texto de España en los siglos XVIII y XIX. Y Rodríguez (2010) expone un trabajo acerca del desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales. Con el objetivo de identificar concepciones históricas de los métodos iterativos, problemas que se resolvían empleando este tema y cómo ha evolucionado.

Picado (2012) lleva a cabo un estudio sobre el sistema métrico decimal (SMD) en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892) con el propósito de indagar sobre los cambios curriculares ocurridos durante el período 1849-1892, por motivo de la implantación del SMD en España, su contexto, sus implicaciones educativas y su concreción en los libros de texto de matemáticas para estudiantes de Primaria, estudiantes de Secundaria y formación de maestros en las Escuelas Normales.

Como puede observarse el método de investigación histórica puede usarse con diferentes enfoques de investigación. Cómo por ejemplo: el tratamiento didáctico en libros de texto en una época determinada; influencia en los cambios curriculares; y análisis histórico epistemológico, bajo un enfoque didáctico.

Particularmente en esta tesis, se usará el método de investigación histórico-lógico como guía en el análisis histórico. Específicamente se empleará el método propuesto por Cohen y Manion (2002) el cual es descrito en la siguiente sección.

2.2 El Método de investigación Histórico-Lógico

El método de investigación histórico-lógico surge por la creciente necesidad de realizar investigaciones de corte histórico y de explicar cómo llevar a cabo este tipo de trabajos. Este método de investigación proponen cuatro etapas las cuales son descritas como: la elección de tema, recopilación de datos, evaluación de fuentes encontradas y redacción del informe de investigación. A continuación se describe cada una de estas etapas y cómo estás se fueron empleando en el desarrollo de esta investigación.

2.2.1 Elección de tema

La primera etapa es la *elección del tema*. Según Cohen y Manion (2002) el investigador escoge el tópico que desea investigar, tomando en consideración el impacto de su estudio en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, también se dan a conocer los aspectos que lo motivan para realizar estos estudios. Además, en esta etapa se define el tipo de investigación histórica, se determina el problema y el objetivo de investigación, realizando las acotaciones necesarias a los mismos.

De la elección de tema, se destaca que es crucial en el desarrollo de una investigación histórica epistemológica, puesto que en ésta se generan hipótesis de cómo se desarrollará el estudio histórico. Dado que esta hipótesis es esenciales, ya que a través de estas se define el periodo de tiempo en el cual el objeto matemático evolucionó significativamente, en qué lugar y bajo qué contexto cultural se desarrollaron los hechos, quienes fueron los matemáticos y las instituciones que estuvieron involucradas. Por otro lado, la inadecuada elección del objetivo de investigación conlleva a una búsqueda y elección de información infructuosa.

Particularmente en esta investigación, la primera etapa está delimitada en el primer capítulo, en el cual se justifica la pertinencia de este tipo de estudios, se revisa la literatura y se define la obra que se desea estudiar y su importancia dentro de la epistemología del cálculo fraccionario. También, se concretaron la problemática, los objetivos específicos y los particulares de investigaciones.

2.2.2 Recolección de datos

La segunda es la *recolección de los datos*. La particularidad de esta etapa, es que para la investigación histórica aquí los datos ya existen. Su recopilación, consiste en identificar distintas fuentes de información como documentos escritos, sonoros, pictóricos, memorias, diarios, periódicos, revistas, guías, libros de actas entre otros. Estos elementos de consulta son catalogados en dos grupos: fuentes primarias y fuentes secundarias. Las fuentes primarias son aquellas que son originales del problema estudiado, es decir, son aquellos manuscritos, memorias, diarios, etc., que están directamente implicados en el desarrollo del objeto matemático. Mientras que las fuentes secundarias son aquellas que no llevan o implican una relación física con el suceso estudiado, son producto del estudio de las fuentes primarias por otros investigadores, o de la interpretación de personas ajenas al suceso (Cohen y Manion, 2002). En general, las fuentes secundarias son útiles para incursionar en el suceso estudiado e identificar las fuentes primarias.

Para llevar a cabo esta segunda etapa, en primer lugar recurrimos a la búsqueda de fuentes secundarias mediante una revisión de literatura en bases de datos como SJR, Dialnet, Ebsco, Elsevier, Erih, Gale, Scielo entre otras, además de revistas sobre historia de la matemática. Como resultado de esta búsqueda se encontraron seis artículos de revistas que documentan información sobre el desarrollo histórico del cálculo fraccionario. Las fuentes secundarias identificadas se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Fuentes secundarias analizadas.

Año	Autor	Titulo
1974	Oldham y Spanier	*The Fractional Calculus*. New York: Mathematics in Science and Engineering
1977	Ross	The development of fractional calculus 1695-1900. *Historia Matemática, 4,* 75-89.
2004	Debnath	A brief historical introduction to fractional calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(4), 487-501
2011	Sánchez	Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional. *Pensamiento Matemático*, *1*(2), 1-15
2014	Lombardero	Cálculo Fraccionario y Dinámica Newtoniana. *Pensamiento Matemático, 4*(1), 77-106.
2015	Guía-Calderón, Rosales-García, Guzmán-Cabrera, González-Parada, y Álvarez-Jaime	El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. *Acta Universitaria*, *25*(2), 20-27.

Una vez localizadas las fuentes secundarias referenciadas, se realizó una lectura detallada de las mismas, con el objetivo de encontrar fuentes primarias trascendentes en el desarrollo del cálculo fraccionario de 1695 a 1832. Como resultado de esta consulta se identificaron las siguientes fuentes primarias, presentadas en la tabla 2.

Tabla 2. Fuentes primarias de 1695 a 1832.

Año	Autor	Titulo
1695	Leibniz	Carta para L´Hôpital]. En Mathematische Schriften 1849, reimpresa en 1962, Hildesheim, Alemania, 2, 301-302
1695	Leibniz	Carta para L´Hôpital. En Mathematische Schriften 1849, reimpresa en 1962, Hildesheim, Alemania, 2, 301-302

1697	Leibniz	Carta de Hanover a John Wallis. Ibid., 4, 25.
1738	Euler	De progressionibus transcendentibus, sev quarum termini generales algebraice dari nequent Commentarii. *Academiae Scientiarum Imperialis Scientiarum Petropolitanae*, *5*, 55.
1819	Lacroix	*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Segunda edición, Vol. 3 (pp. 409-410). Paris: Courcier.
1823	Abel	*Résolution d'un problème de mécanique*. Oeuvres Complètes (tomo premier, pp. 27-30). Gröndah: Christiana.
1832	Liouville	Mémoire sur questions de Geométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quesions. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, *21*(13), 1-69.
1832	Liouville	Sur le Calcul des Différentielles à Indices quelconques. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, *21*(13), 71-162.
1832	Liouville	Sur l'Intégration de l'equation $(mx^2+nx+p)\frac{d^2y}{dx^2}+(qx+r)\frac{dy}{dx}+sy=0$ à l'aide des Différentielles à Indices quelconques. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, *21*(13), 163-186.

En general, el desarrollo del cálculo fraccionario estuvo influenciado por distintos matemáticos como se puede evidenciar en la tabla 2. Sin embargo, basados en la lectura realizada a las fuentes secundarias, encontramos un papel relevante en el trabajo del matemático Joseph Liouville presentado en la memoria *Mémoire Sur quelques Questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions*. Dado que, a Liouville se le adjudica la primera definición formal de la derivada fraccionaria y además en este trabajo Liouville retoma las ideas de Leibniz, Euler y Lagrange.

Por otro lado, respecto al análisis de las fuentes secundarias se refleja la importancia del estudio de la obra de Liouville (1832a), puesto que, esta obra se caracteriza porque en ella se da la primera definición formal lógica de derivada fraccionaria y además de da la primera aplicación del cálculo faccionario, dado que hasta el momento este campo era más teórico que aplicativo.

Los argumentos presentados, acerca de la importancia de la obra en cuestión se consideraron desde dos perspectivas. Una de forma explícita cuando los autores enfatizan en la importancia de la obra de Liouville; y otra de forma implícita cuando la obra de Liouville hace parte de los análisis históricos desarrollados por ellos.

Las fuentes secundarias que destacan de forma implícita el aporte al desarrollo de cálculo fraccionario realizado por Liouville (1832a) son las siguientes:

> "… llamaron la atención de Joseph Liouville, a quien con seguridad le debemos históricamente la primera definición formal lógica del concepto de derivada fraccional, desarrollado en la publicación de sus tres largas memorias en 1832 y alguna más en 1855". (Sánchez, 2011, p.4)
>
> "Destacan, a principios del s. XIX, las figuras de Abel y Liouville, que propician el salto cualitativo desde la prehistoria a la historia del Cálculo Fraccionario". (Lombardero, 2014, p.79)
>
> "Tal vez fue la fórmula integral de Fourier y la solución de Abel la que atrajo la atención de Liouville, que hizo el primer estudio importante del cálculo fraccional. Publicó tres grandes memorias en 1832." (Ross, 1977, p.78)

Y de forma implícita

> "Joseph Liouville (1832) hace referencia, en Mémoire sur questions de Geométrie et de Mécanique…, a los trabajos de Euler, Laplace, Fourier y al libro de cálculo de Lacroix;… Liouville (1832) da una expresión para la integral fraccionaria de una función arbitraria… Liouville (1832), en la misma memoria, aplica la fórmula para resolver varios problemas de electrodinámica, geometría y mecánica". (Guía et al., 2015, p.23-24)
>
> "Por otra parte, en [2], Joseph Liouville (1809-1882) extendió formalmente la fórmula para la derivada del orden integral n" (Debnath, 2004, p.487)

En síntesis la elección de la memoria de Liouville (1832a) como fuente primaria para el desarrollo de esta investigación se debe a la importancia que los historiadores le han dado a su trabajo.

2.2.3 Evaluación

La tercera etapa es la *evaluació*n. Dado que se obtienen muchos datos y distinta información el investigador debe averiguar cuidadosamente y atestiguar el valor de estas fuentes para los propósitos del estudio. Esta evaluación, se puede apreciar desde dos perspectivas, una desde la crítica externa y otra desde la crítica interna.

2.2.3.1 Crítica externa

Se preocupa por establecer la autenticidad y legitimidad de los datos, es decir se encarga de evaluar que las fuentes sean originales, que se encuentren en buen estado y que el lugar en el cual fueron encontradas sea fiable.

En nuestro caso particular la memoria que será utilizada en el análisis, se encuentra en modo digital y fue encontrada en la base de datos de la biblioteca central de la universidad l'École Polytechnique. Particularmente, la obra puede ser encontrada en la siguiente página web http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb34378280v/date dando clic en el año 1832. El cuanto al estado de la memoria señalamos que se encuentra en buen estado y es totalmente legible.

2.2.3.2 Crítica interna

Este tipo de crítica, consiste en analizar el aporte que la fuente primaria o secundaria hace a la investigación, estudiando si el autor era una persona competente, si la obra está avalada por la comunidad de investigadores, cuál era la intención del autor al redactar el documento entre otros aspectos y cuál es el aporte de la obra a la pregunta de investigación. En la crítica interna se realiza un análisis exhaustivo de los datos encontrados y es necesario apoyarse en metodologías adecuadas para analizar documentos. En particular, en esta investigación se usaron dos metodologías de análisis de documentos, las cuales permitieron analizar la obra de Liouville desde una perspectiva externa (ficha de referencia de la obra, contextualización de la obra e intencionalidad del autor) y desde una perspectiva interna (análisis cualitativo de la obra).

Para el análisis de tipo externo recurriremos a una parte de la metodología utilizada por Rodríguez (2010), basada en Ruiz (1976) y González (2002). En la cual destaca dos elementos importantes en la revisión de fuentes históricas. El primero es la *ficha de referencia de la obra* que incluye: nombre del autor, fechas de nacimiento y fallecimiento del autor, título de la obra, año de la primera edición, edición analizada y localización del manual utilizado. El segundo es referente *a la contextualización de la obra e intencionalidad del autor* que involucra: el momento histórico y lugar donde fue escrita la obra, contexto histórico cultural donde fue escrita la obra, objetivos de la fuente, innovaciones introducidas en el material y otras obras publicadas.

Ahora bien, para el análisis de tipo interno de la obra recurriremos al análisis cualitativo de textos propuesto por Kuckartz (2014). El cual tiene como objetivo realizar análisis de textos con altos estándares de objetividad, fiabilidad y validez. Esta metodología, se divide en cinco fases: en la primera se lee y se interpretar el texto de la investigación; en la segunda se construyen categorías; en la tercera se codifican los elementos del texto; en la cuarta se analizan estas categorías y en la última fase se presentan los resultados. Ver figura 1.

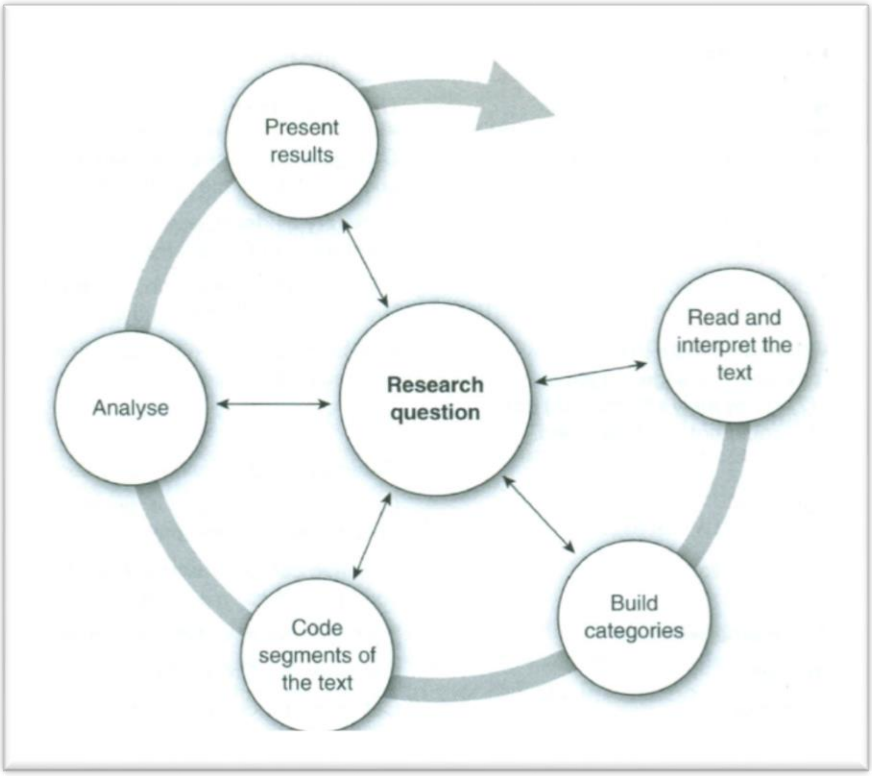


Figura 1: proceso general del análisis cualitativo de textos (Kuckartz, 2014, p.40).

Fase 1. Se realiza una *lectura rigurosa del texto a analizar*, con el propósito de que el lector se familiarice con el documento e identifique cada uno de los aspectos relevantes del mismo, tanto de estructura como de contendido. En nuestro caso la lectura de la obra de Liouville (1832a) nos permitió reconocer los aspectos relevantes de esta memoria, que fueron empleados en la construcción de las categorías de análisis.

Fase 2. A partir, de la lectura e interpretación del texto se da paso a la *construcción de categorías* las cuales desde la perspectiva de Kuckartz (2014) son el resultado de algún tipo de clasificación. La construcción de estas puede ser tipo inductivo o deductivo. Las de tipo inductivo son aquellas que se construyen después de una lectura profunda del texto, y nacen según los elementos encontrados en el documento. Las de tipo deductivo se construyen antes de leer el texto y están determinadas por el marco teórico o por las hipótesis de investigación o las preguntas de investigación. En nuestro caso las categorías establecidas son tanto de tipo deductivas (las construidas a partir de la metodología de Rodríguez (2010)) y de tipo inductivas (construidas a partir de la lectura del texto).

Fase 3. Se asignan las categorías diseñadas a los datos, específicamente a los diferentes pasajes del texto, cada asignación se conoce como una *codificación* (Kuckartz, 2014). Además, en esta fase se analiza la posibilidad de la creación de nuevas categorías, en relación con lo encontrado en el texto.

Fase 4. Se *analiza* la aplicación del sistema de categorías que han sido previamente diseñadas y discutidas por los investigadores. Adicionalmente, se realiza la descripción de cada una de éstas.

Fase 5. Se presentan los resultados de la investigación. Considerando que cada una de las fases descritas se relaciona de forma circular y que cada una de las fases deben ser llevadas a cabo enfocándose al objetivo de investigación. Se hace hincapié en que "el proceso de análisis debe ser visto como un proceso no lineal en el cual las diferentes fases no están estrictamente separadas entre sí" (Kuckartz, 2014, p.48). Como conclusión de la crítica interna presentamos la tabla 3, en la cual se muestra las categorías de análisis tanto de tipo deductivo como inductivo. Basados en los fundamentos teóricos de Rodríguez (2010) y Kuckartz (2014).

Tabla 3. Categorías de análisis.

Unidades de análisis	Categorías de Análisis	Códigos
Ficha de referencia de la obra	• Nombre del autor • Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor • Primera Edición • Edición analizada • Localización del manual Utilizado	**FR**
Contexto y propósitos de la obra y del autor	Momento histórico y lugar donde fue escrita la obra	**MH**
	Formación de autor	**FA**
	Otras obras publicadas	**OP**
	Objetivos generales de la obra	**OG**
	Innovaciones introducidas por el material	**IM**
	Contexto histórico de las matemáticas en general	**CH**
	Conexiones con otros conceptos	**CC**

Análisis cualitativo del texto.	Tipos de representaciones	**TR**
	Definiciones	**DF**
	Teoremas	**TE**
	Tipos de problemas	**TP**

2.2.4 Redacción del documento

Finalmente, se realiza la redacción del informe de investigación en la cual se exponen los hechos abarcados en la temática de investigación y en el cual según Cohen y Manion (2002) es la fase más difícil de este método, ya que exige una gran capacidad de síntesis, una considerable imaginación, un gran manejo de recursos y subjetividad por parte del investigador.

Esta etapa se desarrolló a lo largo de toda la investigación.

2.3 Análisis externo de la obra

En esta sección se presentarán los resultados de las dos primeras unidades de análisis expuestas en la tabla 3.

2.3.1 Ficha de referencia de la obra

En esta sección se presentarán algunos aspectos que pensamos formales dentro de la investigación histórica y los cuales de forma implícita han sido abordados anteriormente. Sin embargo, consideramos pertinente volver a mencionar estos aspectos con el fin de sintetizar y de dar mayor rigurosidad a la investigación. En este sentido, la ficha de referencia de la fuente a analizar se presenta en la tabla 4 (**FR)**.

Tabla 4. Ficha de referencia de la obra.

Nombre del autor	Joseph Louis Liouville
Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor	1809-1882
Titulo	*Mémoire sur questions de Geométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quesions*

Año, editorial y lugar de la primera edición	1832, artículo de revista publicado en el Journal de l’Ecole Polytechnique, en el volumen 13, número 21.
Localización de la obra analizada.	Base de datos de la Biblioteca Central de la Universidad l'École Polytechnique. Fuente tomada de http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb34378280v/date.

2.3.2 Contexto y propósitos de la obra y del autor

Como parte de esta unidad de análisis se establecieron seis categorías de análisis, las cuales serán descritas a continuación.

2.3.2.1 Momento histórico y lugar dónde fue escrita la obra

La obra de Liouville (1832a) fue escrita en Francia, y publicada en la revista del l’Ecole Polytechnique una de las instituciones más sobresalientes de la época, tanto en Francia como en el mundo.

Para la época que fue presentada la obra de Liouville, según Struik (1998) se vivía la revolución francesa y el periodo napoleónico, condiciones que fueron favorables para que la matemática se desarrollará. Camino que fue abierto por la revolución industrial en el continente europeo. Asimismo, este autor menciona que esta revolución estimuló el avance en las ciencias físicas, creando clases sociales con una nueva perspectiva sobre la vida, interesadas en la ciencia y en la educación técnica. Incidiendo, también en las ideas demócratas lo que provocó que las escuelas y las universidades fueran reformadas y rejuvenecidas.

Sin embargo, Struik (1998) señala que el surgimiento matemático no se debió a los problemas técnicos ocasionados por las nuevas industrias, dado que, en Inglaterra el corazón de la revolución industrial, no se dieron grandes avances matemáticos. Mientras que en Francia la matemática progresó bastante, al igual que en Alemania un poco más tarde, países en los cuales, la ruptura ideológica fue más fuerte.

También, para esta época ocurrieron aspectos significativos en torno al desarrollo de las matemáticas, puesto que las nuevas investigaciones en esta ciencia se encontraban separadas de las demandas económicas o de la guerra. Lo que condujo, a un dilema en torno al sentido de las matemáticas: si debían ser aplicadas, es decir responder a problemas de la vida cotidiana (enfoque defendido por Fourier); o si debían ser puras, es decir solo aportar a la ciencia.

Los matemáticos de la época también sufrían cambios fundamentales, entre ellos el papel que tenían en la sociedad. Puesto que, su principal ocupación ya no consistía en ser miembros de una docta académica; pasaron a ser más educadores y examinadores de la juventud. Es decir, en esta época se empezó a dar importancia tanto a la enseñanza de las matemáticas como a la investigación en las mismas, tanto en el ámbito aplicativo como en el puro.

Se concluye en este apartado que la obra de Liouville (1832a) fue escrita, en un momento donde la matemática avanzaba en Francia y por lo cual su aporte fue significativo tanto al cálculo fraccionario como a las matemáticas en general. Además, podemos constatar que en la obra de Liouville se refleja lo que estaba pasando, puesto que en su trabajo se puede apreciar que respondió a dos tendencias por las que pasaban las matemáticas, tanto a la matemática pura, como a la utilidad y aplicación de las matemáticas en diversos contextos.

2.3.2.2 Formación del autor

Joseph Liouville nació el 24 de marzo de 1809 en Saint-Omer, Francia, vivió sus primeros años de vida junto a su tío, dado que su padre era capitán del ejército de Napoleón. Una vez derrotado este ejército, Liouville se fue a vivir junto a su padre y su familia, instalándose en Toul, donde fue a la escuela. De Toul se dirigió al Colegio de San Luis en París, donde estudió matemáticas en los niveles más altos. Después de leer artículos en Gergonne 's Journal demostró algunos resultados geométricos que escribió como documentos a pesar de que nunca fueron publicados.

En el año de 1825 entró a estudiar al École Polytechnique una de las instituciones más reconocidas de la época, en la licenciatura en matemáticas (**FA**); de la cual se graduó en 1827. Tiempo después, Liouville se convirtió en el favorito para ocupar la cátedra en la Escuela Politécnica, cuando quedó una vacante cuando en 1836, sin embargo, después de una estrecha competencia, fue escogido otra persona. En 1837 fue nombrado para dar conferencias en el Collège de France. Finalmente, en 1838 fue elegido profesor de Análisis y Mecánica en el École Polytechnique.

Antes de ser profesor del École Polytechnique, ingresó al instituto École des Ponts et Chaussées, sin embargo por problemas de salud debió retirarse de esa institución. En 1831, Liouville fue nombrado, como asistente de Claude Mathieu. Además, fue profesor de un gran número de escuelas privadas y en la École Centrale.

Otro logro importante dentro de la vida de Liouville fue fundar en el año de 1836 una revista de matemáticas puras llamada *Pures Journal de Mathématiques et Appliquées*, el cual es a veces conocido como *Journal de Liouville* (**FA**). Además, para esta época ya había logrado ser un matemático reconocido, aportando a diversos campos como el cálculo fraccionario, teoría de números, análisis complejo, topología diferencial, geometría pero también en física matemática e incluso astronomía (**FA**).

En su trayectoria como profesor, se menciona que en el año 1850 dio clases de matemáticas en el Collége de France en 1850 y de Mecánica en la Faculté des Sciences en 1857. Se le reconoce también por ser uno de los primeros en leer y reconocer el mérito de las obras inéditas de Évariste Galois y que publicó en su journal en el año 1846.

Liouville también tuvo una breve intervención en política, esto en el año de 1848 participando en la asamblea constituyente. Sin embargo, su participación duró poco, dado que después de las elecciones de 1849 decidió retirarse al ser derrotado.

Finalmente, la vida de Liouville llega a su fin a la edad de 73 años, el 8 de septiembre de 1882, dejando un gran legado en las matemáticas. Se estima que escribió más de 400 artículos en diferentes áreas del conocimiento.

2.3.2.3 Otras obras publicadas

Como se mencionó, Liouville escribió aproximadamente 400 artículos en diferentes áreas del conocimiento. Sin embargo, esta investigación se encuentra bajo el marco del cálculo fraccionario. En este sentido, comentamos que tras una revisión de literatura encontramos que Liouville sólo publico tres obras en relación con este nuevo cálculo, es decir la que se analiza en esta investigación y dos más; se mencionaran de las cuales hablará a groso modo. Cabe mencionar que las tres publicaciones tuvieron lugar en el mismo año y en la misma revista de investigación.

En Liouville (1832b), se ejemplifica la definición de derivada fraccionaria dada en Liouville (1832a) (que será discutida en el siguiente capítulo), realizando derivadas fraccionarias de diferentes funciones como por ejemplo $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$, $g(x) = \cos(z)$, expandiéndolas como una suma de exponenciales. Además, realiza una analogía entre las funciones algebraicas y las exponenciales, exhibiendo lo infinitamente pequeño. Pasando a la exploración de derivadas que pueden obtenerse mediante la reducción de ciertas expresiones a la forma $\frac{0}{0}$. Finalizando, con la demostración de algunas teorías generales sobre diferenciales de cualquier índice.

En la otra obra, Liouville (1832c) se dedica a solucionar la ecuación diferencial $(mx^2 + nx + p)\frac{d^2y}{dx^2} + (qx + r)\frac{dy}{dx} + sy = 0$ usando diferenciales de cualquier índice. Así, en este trabajo Liouville se dedica a presentar un método que él considera simplifica el proceso para solucionar esa ecuación diferencial. Grosamente, el método consiste en emplear aspectos del cálculo fraccionario, descritos en algunos apartados de Liouville (1832a). Cabe mencionar que en esta obra se incluyen innovaciones, mostrando más constructos teóricos y potencialidades de este nuevo cálculo.

2.3.2.4 Objetivos generales de la obra

A pesar de que el análisis cualitativo de la obra de Liouville (1832a), se muestra en el siguiente capítulo, es importante precisar que el resultado para esta categoría es producto del análisis cualitativo de la obra, no obstante la información descrita en este apartado puede ser validada más adelante.

En Liouville (1832a) se identificaron dos objetivos generales (OG). El primer objetivo, se refiere a generalizar los principios del cálculo convencional, particularmente su intención es contribuir a la fundamentación teórica del cálculo fraccionario. El segundo objetivo, y por el cual se desarrolla la obra es mostrar la aplicación de este nuevo campo en áreas del conocimiento como la geometría, el electromagnetismo y la física mecánica.

2.3.2.5 Innovaciones introducidas en la obra

Al igual que en la categoría anterior, el resultado de esta categoría se da después del análisis cualitativo de la obra y del análisis de las fuentes secundarias que será presentado en al siguiente sección. Es decir, que la información expresada en esta sección podrá ser validada y ampliada conforme se siga leyendo este documento, especialmente en las conclusiones.

En la obra de Liouville (1832a) se presenta la primera definición de derivada fraccionaria para cualquier tipo de función, dado que en trabajos de otros matemáticos como Lacroix y Euler se dieron definiciones de derivada fraccionaria solo para funciones polinómicas y un poco más ortodoxas en comparación de la presentada por Liouville.

La fundamentación teórica dada hasta el momento del cálculo fraccionario era poco significativa, ya que no había grandes avances en el tema. Así en Liouville (1832a) se fortalece la parte teórica de este cálculo, dado que se presenta una serie de teoremas los cuales eran desconocidos para la época, lo que permitió un avance teórico importante.

Adicionalmente, al aporte teórico se da un aporte aplicativo importante a este cálculo, puesto que, al momento de ser escrita la obra no había una claridad acerca de la aplicación de este nuevo cálculo en otras disciplinas, el único que de forma tangencial se había acercado a la aplicación de esté era Abel y en un solo problema, mientras que Liouville se detuvo a analizar nueve problemas (incluyendo al de Abel) de geometría, electromagnetismo y física mecánica.

2.3.2.2 Contexto histórico de las matemáticas en general

Los resultados de esta categoría se describen desde dos puntos de vista: el primero de ellos, precisando acontecimientos de las matemáticas en general en el siglo XVII, para ello tomamos como referente el libro de *Historia concisa de las matemáticas*; el segundo, lo relacionado al desarrollo histórico del cálculo fraccionario, para ello presentaremos una línea del tiempo de 1695 a 1832 donde 1695 marca el inicio de este cálculo y 1832 el año donde se presenta la fuente a analizar. La línea del tiempo, es resultado del análisis de las fuentes secundarias (Tabla 1).

2.3.2.2.1 Breve descripción de la historia de las matemáticas hasta 1832

Con base en el libro *Historia concisa de las matemáticas* escrito por Struik (1998) se describe de forma sucinta el avance de las matemáticas en siglo XIX.

Todo parte del cálculo convencional, ya que este es el punto de partida del cálculo fraccionario. Para el año de 1832 tanto Leibniz (1646-1716) como Newton (1643-1727) habían sentado los principios del cálculo diferencial. Respecto, al cálculo integral éste era un conocimiento en estudio y se registraban avances significativos, e incluso surgió primero que el cálculo diferencial.

Referente a otras áreas del conocimiento como las ecuaciones diferenciales, las cuales se traen a colisión por su relación con el cálculo fraccionario, se identificó que para el momento en que fue publicada la obra de Liouville (1832) ya se habían presentado avances significativos en este campo, con aportes de los hermanos Jacob Bernoulli (1654-1705) y Johann Bernoulli (1667-1748). Particularmente, el aporte de los hermanos Bernoulli estuvo en la solución de ecuaciones diferenciales homogéneas y de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Relativo a la teoría de números también se precisa que ya existía un avance a pesar la de las dificultades que pasaron los matemáticos para entender conjuntos numéricos como los racionales, irracionales e incluso el conjunto de los complejos. Precisamente, para la época en que fue publicada la obra de Liouville ya existía una representación e interpretación gráfica de los números complejos, presentada inicialmente por Caspar Wessel (1745-1818) en el año 1797, aunque pasó desapercibida y fue traída nuevamente a colisión por Carl Friedrich Gauss (1771-1855) treinta años después (Carrillo, 2002).

Referente al álgebra, ésta que se encontraba en un momento crucial en su avance, dado que para la época se presentaron avances significativos en la teoría de grupos gracias a los aportes de matemáticos como Joseph Louis Lagrange (1736-1813) quien es considerado unos de los padres de la teoría de Grupos. Además, en el año de 1832 se presentó el trabajo de Évariste Galois (1811-1832) que quizás es uno de los trabajos más representativos en el avance del álgebra moderna por su aporte a la teoría de grupos.

Por último, también se presenta un avance para la geometría, puesto que ya se conocían importantes resultados en este campo, como por ejemplo la geometría euclidiana y los elementos; habían explorado los tres problemas geométricos de la antigüedad: La duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Además, ya se registraban aportes a la geometría proyectiva y cartesiana. Incluso al finalizar el siglo diecinueve se dieron a conocer aportes a la geometría no euclidiana (Struik, 1998).

2.3.2.2.2 Desarrollo histórico del Cálculo Fraccionario (1695-1832)

El Cálculo Fraccionario nace de una pregunta que l'Hôpital le realiza a Leibniz en el año de 1695. En esta pregunta l'Hôpital menciona si existe la posibilidad de una derivada de orden no entero, específicamente preguntó qué sucedería si en la expresión $\frac{d^n y}{dx^n}$, n fuera igual a $\frac{1}{2}$. A lo cual Leibniz en ese mismo año en una carta respondió: "que se podría expresar en la serie de cantidad infinita, como por ejemplo $d^{\frac{1}{2}}\overline{xy}$ o $d^{1:2}\overline{xy}$. Sin embargo, los exponentes que pueden ser usados en este tipo de serie son números enteros; concluyendo que hasta el momento esta es una paradoja de la que se extraerán consecuencias útiles".

Tiempo después, en 1730 el cálculo fraccionario fue abordado por el matemático suizo Leonhard Euler, quien en una obra publicada en 1738 presenta algunos comentarios sobre este tópico. En este sentido, según Guía et al (2015) Euler dio una definición de la derivada fraccionaria, aplicando su fórmula de interpolación del factorial entre números enteros positivos y negativos. Euler parte de investigar la relación entre $d^n(z^e)$ y dz^ncon dz constante, y además se supone que n es un entero, para el caso $n = 1$ entonces

$$d^1(z^e) = ez^{e-1} = \left[\frac{1.2.3 \ldots e}{1.2.3 \ldots (e-1)}\right] z^{e-1},$$

para $n = 2$

$$d^2(z^e) = e(e-1)z^{e-2} = \left[\frac{1.2.3 \ldots e}{1.2.3 \ldots (e-2)}\right] z^{e-2}$$

si $n = 3$

$$d^3(z^e) = e(e-1)(e-2)z^{e-3} = \left[\frac{1.2.3 \ldots e}{1.2.3 \ldots (e-3)}\right] z^{e-3}.$$

En general,

$$d^n(z^e) = e(e-1)(e-2) \ldots (e-(n-1))z^{e-n} = \left[\frac{1.2.3 \ldots e}{1.2.3 \ldots (e-n)}\right] z^{e-n},$$

como $1.2.3 \ldots e = \int_0^1 (-1x)^e \, dx$ y $1.2.3 \ldots (e-n) = \int_0^1 (-1x)^{e-n} \, dx$ se concluye que la derivada fraccionaria sería

$$d^n(z^e) = z^{e-n} \frac{\int_0^1 (-1x)^{e-n} dx}{\int_0^1 (-1x)^e dx} dz.$$

Por otra parte, en un ambiente paralelo al desarrollo del cálculo fraccionario Lagrange en el año de 1772 encuentra un resultado de linealidad entre derivadas que contribuye de forma indirecta en el desarrollo de este cálculo. El resultado obtenido es el siguiente

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^n}{dx^n}\right) = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}$$

el cual puede permite expresar linealidad entre el orden de una derivada. Este resultado fue ampliamente usado por Liouville y otros matemáticos, en el desarrollo del cálculo fraccionario como se verá más adelante.

Posterior a Lagrange, en el año de 1819 otro matemático que realiza aportes a este cálculo fue Lacroix, a quién se le atribuye la definición de derivada fraccional de orden ½ de funciones polinómicas. Para ello Lacroix considera la derivada de orden n de un polinomio dada por la expresión:

$$f^n(x) = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \text{ con } m \geq n. \qquad (1)$$

Y recurrió a la función Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-\alpha}\,\alpha^{z-1}d\alpha,$$

la cual le permitió calcular el valor del coeficiente de la expresión anterior para números no enteros gracias a la propiedad

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

convirtiendo la expresión (1) en

$$f^n(x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n},$$

donde n es no entero, particularmente para la época se podía calcular el valor de la derivada de orden ½ para funciones polinómicas.

Después de Lacroix, señala Guía et al. (2015) que es Joseph Fourier quien en el año de 1822 brinda una nueva definición de derivada e integral fraccionaria, partiendo de la siguiente ecuación

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - p\alpha)\,dp. \qquad (2)$$

Note que, si la ecuación (2) se deriva n veces en función de p la derivada de la función coseno solo difiere en el signo y por la regla de la cadena se obtendrá el factor p^n. Por lo tanto, a expandir de $n \in N$ a $\mu \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\frac{d^\mu(f)}{dx^\mu} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(px - p\alpha + i\,\frac{\pi}{2}\right)dp.$$

Siendo una de las primeras definiciones de integral y derivada fraccionaria para cualquier tipo de función, siempre y cuando las integrales impropias converjan.

Otro matemático que influyó al desarrollo del cálculo fraccionario fue Abel, quien dio la primera aplicación de este concepto dentro de la física mecánica, particularmente en la solución del problema de la tautócrona. Dicho problema consiste en encontrar la forma de la curva sobre un plano vertical, tal que un objeto, al deslizarse sin fricción sobre ella, llegue al final de su recorrido en un tiempo que sea independiente del lugar en que comience el movimiento. Si el tiempo de caída es una constante conocida, la ecuación integral de Abel tiene la forma:

$$k = \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} f(t)dt; \qquad (2)$$

que es una integral con núcleo de la forma $(x-t)^a$. Al resolver esta integral, Abel escribió el lado de la derecha como

$$\sqrt{\pi}\ \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} f(x),$$

y al operar la derivada de orden $\frac{1}{2}$ en ambos lados obtuvo que

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} k = \sqrt{\pi}\, f(x). \qquad (3)$$

Ya que estos operadores fraccionales (en condiciones idóneas para f) tienen la propiedad de que $D^{1/2}D^{-1/2} = D^0 f = f$. Por lo tanto cuando la derivada fraccional de orden ½ de la constante k en (3) se calcula, entonces se determina $f(x)$.

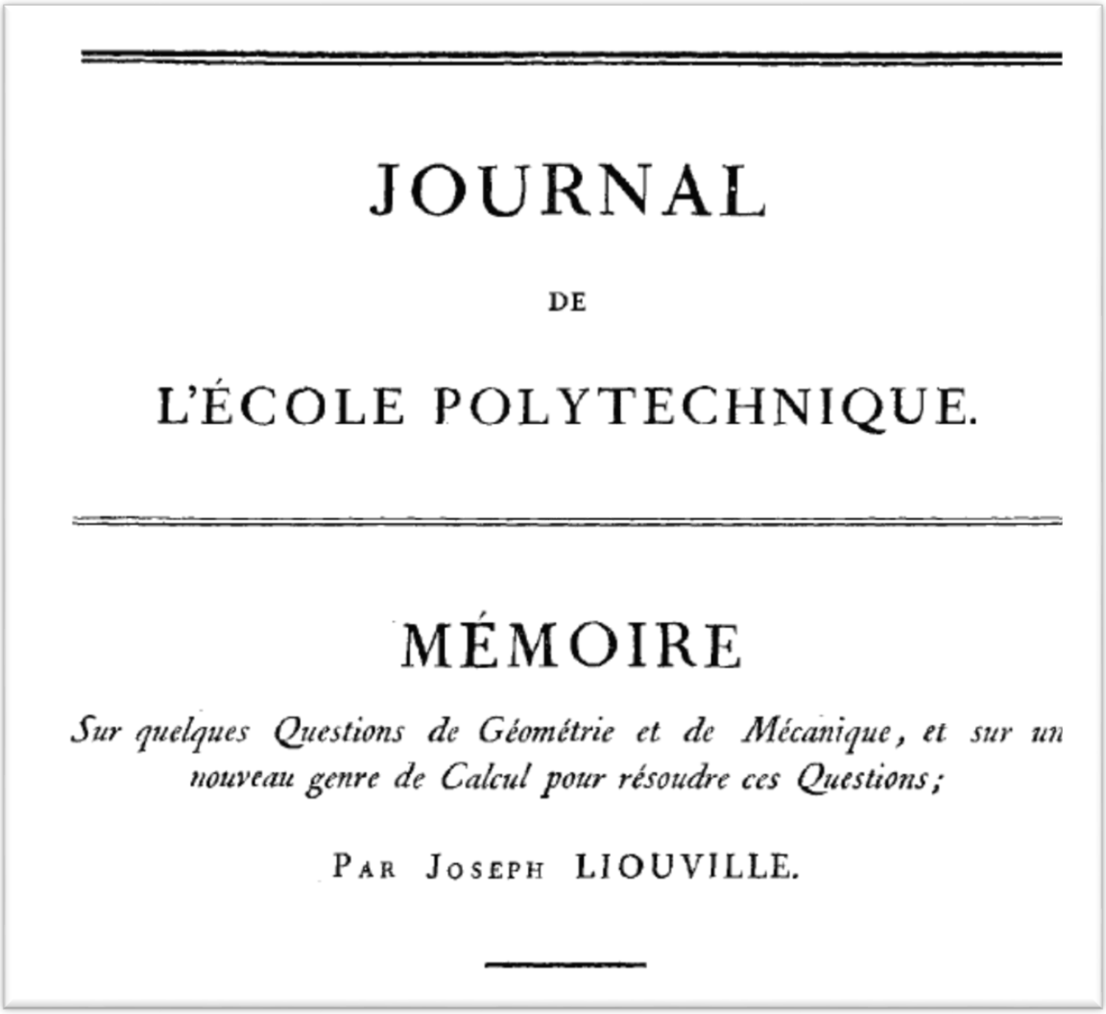
Fue después de los aportes de los matemáticos antes mencionados que Liouville se interesó por la derivada fraccionaria y es así que inicia el desarrollo del cálculo fraccionario de Liouville.

CAPÍTULO 3

Análisis cualitativo de la obra de Liouville (1832a)

Introducción

En este capítulo tiene se presenta el análisis cualitativo de la obra teniendo como referentes las categorías de análisis cualitativo de la obra propuestas en la tabla 3. Con el propósito de conocer los aportes realizados por Liouville a este cálculo y así poder reflexionar en torno a su epistemología. Así esté capitulo está dividido en tres secciones: en la primera se realiza una descripción de los aportes teóricos de la obra de Liouville, particularmente en la definición que dio de derivada fraccionaria junto con algunos ejemplos. En la segunda, se describen algunos de los teoremas dados por Liouville acerca del cálculo fraccionario. Y en el último se describen siete de los nueve problemas en los cuales Liouville muestra la aplicación de este cálculo.



JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

Sur quelques Questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

Figura 2: portada obra Liouville (1832a)

3.1 Definición de Liouville de derivada fraccionaria

Liouville presentó la primera definición de derivada fracionara partiendo de que toda función se puede expresar de la forma $f(x) = \sum A_m \, e^{mx}$. En este sentido, *se le llama diferencial de $f(x)$ o derivada de orden μ a la función que se deduce de multiplicar cada término $A_m e^{mx}$ de la serie de potencias μ* y *del exponente correspondiente m^μexpresándose esta derivada por* $\frac{d^u y}{dx^u}$ o lo que es equivalente en términos de:

$$\frac{d^\mu(f)}{dx^\mu} = \sum A_m \, e^{mx} m^\mu. \qquad \textbf{DE} \qquad (1)$$

Donde μ es el orden la derivada, y μ puede ser un número entero, racional, irracional o complejo; incluso sí μ es negativo se considera que es una integral fraccionaria**.**

Liouville llegó a esta definición en primer lugar haciendo la aclaración de que se basa en las derivadas de orden entero (**CC**); y lo que desea es generalizar los principios del cálculo convencional, contribuyendo tanto a la fundamentación teórica de este nuevo campo, como a mostrar sus aplicaciones en campos de geometría y física (**OG**).

Ahora bien, para llegar a (1) Liouville partió de la premisa de que toda función puede expresarse como la suma de funciones exponenciales, de la forma

$$f(x) = \sum A_m\, e^{mx} \qquad (1.1)$$

luego, al derivar $f(x)$ de manera usual (**CC**)

$$\frac{d^1(f)}{dx} = \sum A_m\, e^{mx} m, \quad \frac{d^2(f)}{dx} = \sum A_m\, e^{mx} m^2, \quad \frac{d^3(f)}{dx} = \sum A_m\, e^{mx} m^3$$

se obtiene

$$\frac{d^n(f)}{dx^n} = \sum A_m\, e^{mx} m^n \text{ con } n \in Z.$$

Lo cual, con una extensión arbitraria de $n \in Z$ a $\mu \in \mathbb{C}$ se llega a la primera de definición presentada en (1).

Por otra parte, como Liouville no se detienen a dar indicaciones sobre como expandir una función en términos de una suma de exponenciales, presenta dos ejemplos de derivada fraccionaria para las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x) = \frac{1}{x^n}$ en los cuales deja ver el uso de la definición expresada en (1). Para algunos historiadores (Ross, 1997; Lombardero, 2014) el ejemplo dado para $f(x) = \frac{1}{x^n}$ es considerado como la segunda definición de Liouville, sin embargo en el análisis de la memoria Liouville deja claro que es un ejemplo. Además, con este par de ejemplos se amplían las posibles funciones que se pueden derivar usando la definición (1) pasando de las de tipo exponencial a las de tipo polinómicas (con algunas restricciones claro está).

En este sentido la derivada fraccionaria para la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se expresa mediante la igualdad

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu} = (-1)^\mu \frac{\Gamma(\mu+1)}{x^{\mu+1}} \qquad \textbf{(DE)} \qquad (1.2)$$

donde $\mu \in \mathbb{C}$ y Γ conocida como la función gamma (**CC**).

Para abordar la derivada fraccional de $f(x) = \frac{1}{x}$ Liouville consideró tres casos. El primero para $x > 0$, el segundo para $x < 0$, y el tercero donde se sintetizan e unifican los dos primeros casos.

Caso 1. Se considera la igualdad siguiente para $x > 0$

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-\propto x}\, d\alpha \qquad (1.3)$$

la cual puede verse verificada al calcular la integral de la derecha en términos de α. Ahora bien, derivando a ambos lados de la ecuación (1.3) en términos de x, y empleando el resultado de la ecuación (1) se obtiene

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu} = \int_0^\infty e^{-\propto x}\,(-\alpha)^\mu\, d\alpha \qquad (1.4)$$

Caso 2. Se considera la igualdad siguiente para $x < 0$

$$\frac{1}{x} = -\int_0^\infty e^{\propto x}\, d\alpha, \qquad (1.5)$$

que nuevamente por verse verificada al calcular la integral de la derecha, y al derivar a ambos lados de (1.5) de forma análoga

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu} = -\int_0^\infty e^{\propto x}\,\alpha^\mu d\alpha \qquad (1.6)$$

Caso 3. Como puede observarse en los casos 1 y 2 la derivada fraccionaria para la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no es única, por lo tanto Liouville consideró dos sustituciones que le permitieron unificar los dos resultados obtenidos. Para el caso 1 toma la igualdad $\alpha x = \theta$ y para el dos la igualdad $\alpha x = -\theta$.

Así, al sustituir en (1.4) las igualdades $\alpha x = \theta$, $\alpha = \frac{\theta}{x}$ y $d\alpha = \frac{d\theta}{x}$ se obtiene que

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu} = \int_0^\infty e^{-\theta}\left(-\frac{\theta}{x}\right)^\mu \frac{d\theta}{x},$$

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu} = (-1)^\mu \frac{\int_0^\infty e^{-\theta}\theta^\mu d\theta}{x^{\mu+1}},$$

al recurrir a la función gama definida como (**CC**)

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-\theta}\,(\theta)^{\mu-1} d\theta \text{ con } \mu \in \mathbb{C}.$$

Se obtiene

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{\mu}} = (-1)^{\mu}\frac{\Gamma(\mu+1)}{x^{\mu+1}}, \qquad (1.2)$$

al sustituir en (1.6) las igualdades $\alpha x = -\theta$, $\alpha = \frac{-\theta}{x}$ y $d\alpha = \frac{-d\theta}{x}$ resulta

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{\mu}} = -\int_{0}^{\infty} e^{-\theta}\left(\frac{-\theta}{x}\right)^{\mu}\frac{-d\theta}{x},$$

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{\mu}} = (-1)^{\mu}\frac{\int_{0}^{\infty} e^{-\theta}\theta^{\mu}d\theta}{x^{\mu+1}}$$

Y al recurrir nuevamente a la función gamma (**CC**) se llega a (1.2).

Ahora bien, la derivada fraccionaria de la función $f(x) = \frac{1}{x^{n}}$ está representada mediante la expresión

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x^{n}}\right)}{dx^{\mu}} = \frac{(-1)^{\mu}\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)x^{n+\mu}}, \quad \textbf{(DE)} \qquad (1.7)$$

con $\mu \in \mathbb{C}$ y Γ conocida como la función gamma (**CC**).

Para la función $f(x) = \frac{1}{x^{n}}$, Liouville realizó un proceso casi similar al utilizado para determinar $f(x) = \frac{1}{x}$ dividendo el proceso en dos casos. Para $x > 0$ y $x < 0$.

Caso 1. Liouville partió de la integral

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\,\alpha^{n-1}d\alpha, \qquad (1.8)$$

la cual tiene similitud con la función gamma y con la definición dada en (1). Una vez establecida la integral en (1.8) como punto de partida. Se considera la sustitución $\alpha x = \theta$ en (1.8) obteniendo la expresión.

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\,\alpha^{n-1}d\alpha = \int_{0}^{\infty} e^{-\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{n-1}\left(\frac{d\theta}{x}\right),$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\,\alpha^{n-1}d\alpha = \frac{\int_{0}^{\infty} e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta}{x^{n}}. \qquad (1.9)$$

Al sustituir $\int_{0}^{\infty} e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta$ por $\Gamma(n)$ y al realizar una trasposición de términos en (1.9) se logra

$$\frac{1}{x^{n}} = \frac{\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\alpha^{n-1}d\alpha}{\Gamma(n)}, \qquad (1.10)$$

al derivar (1.10) empleando la definición (1) se obtiene:

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x^{n}}\right)}{dx^{\mu}}=\frac{\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha x}\alpha^{n-1}(-\alpha)^{\mu}d\alpha}{\Gamma(n)},$$

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x^{n}}\right)}{dx^{\mu}}=\frac{(-1)^{\mu}\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha x}\alpha^{n+\mu-1}d\alpha}{\Gamma(n)}. \qquad (1.11)$$

Nuevamente se utiliza la sustitución $\alpha x=\theta$ en (1.11) lo que conduce a

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x^{n}}\right)}{dx^{\mu}}=\frac{(-1)^{\mu}\int_{0}^{\infty}e^{-\theta}\theta^{n+\mu-1}d\alpha}{\Gamma(n)x^{n+\mu}},$$

precisando que $\Gamma(n+\mu)=\int_{0}^{\infty}e^{-\theta}\,\theta^{n+\mu-1}d\alpha$ **(CC)**, finalmente se obtiene

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x^{n}}\right)}{dx^{\mu}}=\frac{(-1)^{\mu}\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)x^{n+\mu}} \quad \textbf{(DE)} \qquad (1.7)$$

que era lo que se deseaba describir.

Caso 2. Para este caso Liouville empleó un proceso muy similar al caso anterior, por lo tanto ésta descripción será lo más sintética posible.

Se parte de la integral

$$\int_{0}^{\infty}e^{\alpha x}\,\alpha^{n-1}d\alpha\,, \qquad (1.12)$$

y al considerar la sustitución $\alpha x=-\theta$ lo cual conduce a

$$\int_{0}^{\infty}e^{\alpha x}\,\alpha^{n-1}d\alpha=\int_{0}^{\infty}e^{\alpha x}\left(\frac{-\theta}{x}\right)^{n-1}\left(\frac{-d\theta}{x}\right),$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{\alpha x}\,\alpha^{n-1}d\alpha=\frac{(-1)^{n}\int_{0}^{\infty}e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta}{x^{n}}\,, \qquad (1.13)$$

al reemplazar $\int_{0}^{\infty}e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta$ por $\Gamma(n)$ y al realizar una trasposición de términos en (1.13) se llega a

$$\frac{1}{x^{n}}=\frac{\int_{0}^{\infty}e^{\alpha x}\alpha^{n-1}d\alpha}{(-1)^{n}\Gamma(n)}. \qquad (1.14)$$

Así, al derivar μ veces (1.14) empleando (1)

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x^{n}}\right)}{dx^{\mu}}=\frac{\int_{0}^{\infty}e^{\alpha x}\alpha^{n+\mu-1}d\alpha}{(-1)^{n}\Gamma(n)}, \qquad (1.15)$$

y al sustituir $\alpha x=-\theta$ en (1.15)

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x^{n}}\right)}{dx^{\mu}}=\frac{\int_{0}^{\infty}e^{-\theta}\left(-\frac{\theta}{x}\right)^{n+\mu-1}\left(\frac{-d\theta}{x}\right)}{(-1)^{n}\Gamma(n)}$$

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx^{\mu}} = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\theta}(-1)^{n+\mu}\theta^{n+\mu-1}d\theta}{(-1)^n\Gamma(n)x^{n+\mu}}$$

$$\frac{d^{\mu}\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx^{\mu}} = \frac{(-1)^{\mu}\int_0^{\infty} e^{-\theta}\theta^{n+\mu-1}\,d\theta}{\Gamma(n)x^{n+\mu}}$$

Dado que $\int_0^{\infty} e^{-\theta}\theta^{n+\mu-1}\,d\theta = \Gamma(n+u)$, (**CC**) se llega una vez más a (1.7).

3.2 Teoremas del cálculo fraccionario

Como se mencionó uno de los objetivos de la obra de Liouville (1832a), fue mostrar las aplicaciones del cálculo fraccionario en contextos de geometría, electromagnetismo y física mecánica. Por lo cual, él planteó la necesidad de demostrar tres teoremas los cuales le serían de utilidad para resolver nueve problemas, de los cuales siete serán descritos más adelante.

Es importante, resaltar que Liouville no dio un enunciado a estos teoremas, simplemente se limitó a dar tres ecuaciones (A), (B), (C) con algunas restricciones. Además, existe una clara dependencia de las ecuaciones (B) y (C) con respecto a (A), lo que hoy en día podríamos conocer como *corolarios*, por lo cual es de vital importancia comprender la demostración del primer teorema.

Teorema A. Sea $\phi(x) = \sum A_m\, e^{mx}$ con $m < 0$ o al menos de la forma $-p + q\sqrt{-1}$ con $-p < 0$; $\mu \in \mathbb{C}^+$ y $\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-\theta}\theta^{\mu-1}\,d\theta$ entonces se cumple que

$$\int^{\mu}\phi(x)dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu}\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\phi(x+\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha \qquad (\textbf{TE}) \qquad (A)$$

Para probar este teorema Liouville partió de la integral

$$\int_0^{\infty}\phi(x+\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha \qquad (2.1)$$

la cual la denotó como Z. Ahora bien, como $\phi(x) = \sum A_m\, e^{mx}$, entonces $\phi(x+\alpha) = \sum A_m\, e^{m(x+\alpha)}$ y al sustituir esta igualdad en (2.1) se concluye que

$$Z = \int_0^{\infty}\sum A_m\, e^{m(x+\alpha)}\alpha^{\mu-1}d\alpha. \qquad (2.2)$$

Y al intercambiar el orden entre $\int$ y Σ en (2.2) se obtiene que

$$Z = \sum A_m e^{mx}\int_0^{\infty} e^{m\alpha}\alpha^{\mu-1}d\alpha. \qquad (2.3)$$

Por otro lado, al considera la sustitución $m\alpha = -\theta$, $m\alpha$ un número negativo, en la integral

$$\int_0^\infty e^{m\alpha}\alpha^{\mu-1}d\alpha,$$

se llega a la igualdad

$$\int_0^\infty e^{m\alpha}\alpha^{\mu-1}d\alpha = (-1)^\mu \frac{\int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{\mu-1}d\theta}{m^\mu}, \qquad (2.4)$$

dado que $\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{\mu-1}\, d\theta$, al sustituir está igualdad en (2.4) da como resultado

$$\int_0^\infty e^{m\alpha}\alpha^{\mu-1}d\alpha = \frac{(-1)^\mu\Gamma(\mu)}{m^\mu}, \qquad (2.5)$$

y al multiplicar $\sum A_m\, e^{mx}$ en ambos lados de (2.5) se obtiene que

$$\sum A_m\, e^{mx}\int_0^\infty e^{m\alpha}\alpha^{\mu-1}d\alpha = \frac{(-1)^\mu\Gamma(\mu)\sum A_m e^{mx}}{m^\mu}. \qquad (2.6)$$

Por otra parte, si $\phi(x) = \sum A_m\, e^{mx}$ entonces al integrar esta igualdad aplicando la definición expresada en (1) se tiene que

$$\int^\mu \phi(x)dx^\mu = \frac{\sum A_m e^{mx}}{m^\mu}, \qquad (2.7)$$

así, al sustituir en (2.7) en (2.6) se llega a

$$\sum A_m\, e^{mx}\int_0^\infty e^{m\alpha}\alpha^{\mu-1}d\alpha = (-1)^\mu\Gamma(\mu)\int^\mu\phi(x)dx^\mu,$$

lo que es equivalente a

$$\int_0^\infty \sum A_m\, e^{m(x+\alpha)}\alpha^{\mu-1}d\alpha = (-1)^\mu\Gamma(\mu)\int^\mu\phi(x)dx^\mu.$$

Llegando a lo que finalmente se quería probar

$$\frac{\int_0^\infty \phi(x+\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha}{(-1)^\mu\Gamma(\mu)} = \int^\mu\phi(x)dx^\mu.$$

El segundo teorema dado por Liouville nace con la necesidad de diluir algunas de las restricciones planteadas en el Teorema (A). Por ejemplo, que u sea positiva, lo cual da validez a las integrales desarrolladas anteriormente; y que además m es esencialmente negativo.

Ante los argumentos antes expuestos, Liouville propuso una alternativa para el caso en que u sea negativa, es decir una ecuación para $\frac{d^\mu\phi(x)}{dx^\mu}$. En este caso él propone, que se considere un número entero n mayor que p y p el número fraccionario que se debe restar de n para obtener μ. Es decir, se cumple la igualdad entre índices $\mu = n - p$ con p un número positivo. En conclusión el segundo teorema es

$$\frac{d^\mu \phi(x)}{dx^\mu} = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} . \int_0^\infty \frac{d^n \phi(x+\alpha)}{dx^n} \; \alpha^{p-1} d\alpha \qquad \textbf{(TE)} \qquad \text{(B)}$$

Para probar este teorema, se parte del el hecho que si $\mu = n - p$ entonces se cumple que

$$\frac{d^\mu \phi(x)}{dx^\mu} = \frac{d^{n-p} \phi(x)}{dx^{n-p}} = \frac{d^n \int^p \phi(x) dx^p}{dx^n} \, . \qquad (2.8)$$

Y al hacer $\mu = p$ en la fórmula (A), lo cual es posible puesto que ambos son positivos se obtiene

$$\int^p \phi(x) dx^p = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty \phi(x+\alpha) \alpha^{p-1} d\alpha, \qquad (2.9)$$

finalmente, al sustituir (2.9) en (2.8) se concluye que

$$\frac{d^\mu \phi(x)}{dx^\mu} = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{d^n \phi(x+\alpha)}{dx^n} \alpha^{p-1} d\alpha,$$

que era lo que se deseaba probar.

Es importante precisar que a partir del Corolario (B) Liouville resaltó que una derivada fraccional puede expresarse en términos de una integral definida. Lo cual es un aspecto relevante dentro del cálculo fraccionario. Además, que los teoremas (A) y (B) permiten calcular los índices derivados de la función $\phi(x)$ sean negativos o positivos, excepto cuando $\phi(x)$ sea cero.

Para el tercer corolario, Liouville planteó la sustitución x por x^2 y α por τ^2 en la ecuación del Teorema (A) lo que dio como resultado (note que $d\alpha$ equivale a $\frac{2d\alpha}{\alpha}$ en esta sustitución)

$$\int^\mu \phi(x^2) d(x^2)^\mu = \frac{2}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)} \int_0^\infty \phi(x^2+\alpha^2) \alpha^{2\mu-1} d\alpha.$$

La cual al reescribirla concluye en el Corolario (C)

$$\int_0^\infty \phi(x^2+\alpha^2) \alpha^{2\mu-1} d\alpha = \frac{(-1)^\mu \Gamma(\mu)}{2} \int_0^\infty \phi(x^2+\alpha^2) \alpha^{2\mu-1} d\alpha. \qquad \textbf{(TE)} \qquad \text{(C)}$$

3.3 Aplicaciones del cálculo fraccionario

En esta sección se describirán algunos problemas descritos por Liouville, en los cuales se muestra la aplicabilidad en este nuevo cálculo en tres disciplinas .

3.3.1 Problema 1: construcción de la curva AMB

Il s'agit de tracer une courbe $A\ M\ B$ (fig. 1re) qui jouisse de la propriété suivante.

On mène une ordonnée quelconque $M\ P$ de cette courbe, et on décrit une parabole $P\ Q\ R$ ayant son sommet au point P, son grand axe sur Ox et son paramètre $= 2O\ P = 2\ x$. Puis on construit une troisième courbe $P\ N\ V$ dont l'ordonnée soit pour chaque abcisse le produit des ordonnées correspondantes des deux premières, en sorte que $N\ S = B\ S \times Q\ S$.

Cela posé, on demande que l'aire indéfinie $x\ P\ N\ V$ soit constante et égale à a^2 pour toutes les positions de l'ordonnée $M\ P$.

Figura 3: enunciado del problema 1.

Este problema consiste en dibujar una curva AMB (ver figura 4) que satisface las siguientes condiciones:

Cualquier ordenada MP de esta curva describe una parábola PQR con vértice en el punto P y su eje mayor sobre el segmento $\overline{Ox}$ *con medidas igual a* $2|OP| = 2x$. *Lo anterior, permite la construcción de una tercera curva PNV, cuya ordenada para cada abscisa es el producto de las ordenadas correspondientes* $NS = (BS)(QS)$. *Así, al construir la tercera curva se requiere que el área bajo la curva de PNV sea contante e igual a* a^2 *para todas las posiciones de la ordenada MP.*

Para la construcción de la curva AMB bajo las condiciones antes mencionadas, Liouville recurrió a aspectos del cálculo fraccionario, especialmente hizo uso de la expresión (1.7) y el teorema (A). Además, considera las siguientes igualdades $|OP| = x$, $MP = \phi(x)$ y tomando desde cualquier punto P la longitud $|PS| = \alpha$, donde la ordenada BS será $\phi(x+\alpha)$. Por último, Liouville menciona que la ordenada QS de la parábola será por la naturaleza de esta curva $\sqrt{2x\alpha}$, dado que el medio parámetro se supone igual a OP; así por hipótesis se obtiene la igualdad

$$NS = (BS)(QS) = \phi(x+\alpha).\sqrt{2x\alpha}$$

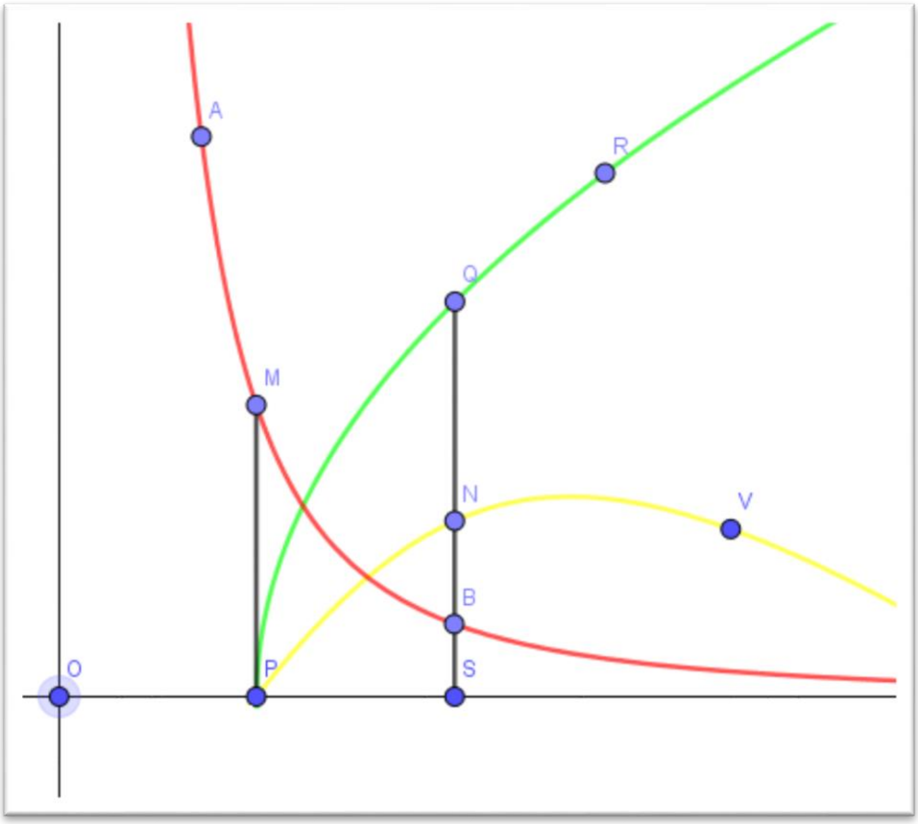


Figura 4: representación gráfica del problema 1.

Por otra parte, el área bajo la curva de PNV por los principios de cálculo integral (**CC**) podrá expresarse como

$$\int_0^\infty \phi(x+\alpha)\,\sqrt{2x\alpha}\,d\alpha,$$

y dado que esta área siempre se debe mantener constante e igual a a^2, a medida que P varia se obtiene la igualdad

$$\int_0^\infty \phi(x+\alpha)\,\sqrt{2x\alpha}\,d\alpha = a^2.$$

Que es equivalente a

$$\int_0^\infty \phi(x+\alpha)\,\sqrt{\alpha}\,d\alpha = \frac{a^2}{\sqrt{2x}}. \qquad (3.1)$$

Ahora bien, el objetivo de este problema es encontrar la curva AMB que satisface las condiciones mencionadas, lo cual es equivalente a encontrar la expresión $f(x)$ o $\phi(x)$ que representa la ordenada esta curva. Así, Liouville consideró una expresión que vinculara los elementos involucrados en la ecuación (3.1) y la función $\phi(x)$, los cuales pueden verse relacionados al utilizar el teorema (A) para $u = 3/2$.

En efecto, al considerar $u = 3/2$ en el teorema (A) se obtiene la siguiente expresión:

$$\int^{3/2}\phi(x)dx^{3/2} = \frac{1}{(-1)^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int_0^{\infty}\phi(x+\alpha)\alpha^{3/2-1}d\alpha,$$

que es equivalente a

$$\int^{3/2}\phi(x)dx^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int_0^{\infty}\phi(x+\alpha)\sqrt{\alpha}d\alpha. \qquad (3.2)$$

Por otro lado, al evaluar $u = 3/2$ en la función Gamma (**CC**)

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\theta}\sqrt{\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ ,$$

al realizar una trasposición de términos y sustituir el resultado anterior en (3.2) se llega a

$$\int_0^{\infty}\phi(x+\alpha)\sqrt{\alpha}d\alpha = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{2}\int^{3/2}\phi(x)dx^{3/2}. \qquad (3.3)$$

Así, por transitividad entre (3.1) y (3.3) se obtiene que

$$\frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{2}\int^{3/2}\phi(x)dx^{3/2} = \frac{a^2}{\sqrt{2x}}$$

o lo que es igual

$$\int^{3/2}\phi(x)dx^{3/2} = \frac{2a^2}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}, \qquad (3.4)$$

dado que, la integral y la derivada se consideran inversas, (3.4) puede verse finalmente reescrita como

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\frac{d^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx^{3/2}}. \qquad (3.5)$$

En efecto, al emplear el resultado dado en (1.7) con $n = 1/2$ y $\mu = 3/2$ se obtiene que

$$\frac{d^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx^{3/2}} = \frac{(-1)^{3/2}\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x^2},$$

que al calcular los valores $\Gamma(2) = 1$ y $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; y al sustituir el valor $\frac{d^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx^{3/2}}$ en (3.5) se concluye que

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{2}a^2}{\pi}\frac{1}{x^2}, \tag{3.6}$$

lo cual da respuesta al problema planteado.

En relación a la solución de este problema Liouville desarrolló y mencionó dos aspectos importantes.

El primero es la verificación de la solución dada a este problema, es decir que la función $\phi(x) = \frac{\sqrt{2}a^2}{\pi}\frac{1}{x^2}$ satisface las condiciones mencionadas. Para ello, Liouville probó que el valor del lado derecho de la ecuación (3.1) es idéntico al del lado izquierdo. Así, para probar esto él evalúa $\phi(x + \alpha)$ y sustituye este valor en (3.1) para después calcular la integral definida, demostrando que el lado izquierdo y derecho de (3.1) son idénticos.

El segundo aspecto, tiene que ver con algunas generalizaciones que se pueden presentar a las condiciones dadas al problema. Entre ellas que la curva PQR no tiene que ser necesariamente una parábola, dado que el problema hubiese podido considerar cualquier otro tipo de curva y tener solución. Otra generalización, es que el área bajo la curva de PNV no se consideré igual a una constante, sino igual a una función arbitraria $F(x)$. Lo que daría como resultado una función $\phi(x)$ que sería la diferencia fraccional de una función conocida $\frac{F(x)}{x}$.

Finalmente Liouville hizo una apreciación importante, y es que la mayoría de problemas físico matemáticos que son solucionados empleando el cálculo fraccionario, dependen fundamentalmente de una cuestión similar a la tratada en este primer problema (condiciones bajo la cual se da cierta relación) y la de encontrar una función arbitraria $\phi(x)$ precedida bajo el signo $\int$. Mostrando así, que las propiedades de los diferenciales con cualquier índice están vinculadas a las teorías matemáticas más espinosas y útiles.

3.3.2 Problema 2: acción de un polo sobre un hilo de corriente eléctrica

Este problema tiene una aplicación directa en física, particularmente en electrodinámica. El objetivo es determinar la función distancia a la cual se ubica un polo magnético (P) del elemento L que pertenece a una línea de corriente MM'. Donde el polo P actúa sobre el elemento mm' del hilo conductor que une los extremos de una pila de Volta y L es el punto medio de mm' como puede apreciarse en la figura 6.

Les diverses parties de la droite MM' indéfinie dans les deux sens (fig. 3), exercent sur le point P une action dont la direction est normale au plan PMM'; ces actions s'ajoutent pour former une résultante aussi normale à ce plan, et dont on suppose que l'intensité est une fonction connue $\frac{i}{y}$ de la distance $PA = y$ et plus généralement une fonction $f(y)$.

XXI.e Cahier.

On sait en outre que l'action d'un élément mm' sur P est proportionnelle à mm', au sinus de l'angle Plm', et à une fonction $\varphi(r)$ de la distance PI ou r.

Cela posé, connaissant $f(y)$, on demande de trouver $\varphi(r)$.

Figura 5: enunciado del problema 2

Bajo este contexto el problema es el siguiente:

Las diversas partes de la línea MM' indefinida en ambas direcciones (Figura 6), ejercen sobre el punto P una acción cuya dirección es normal al plano PMM' estas acciones se suman para formar una resultante normal de este plano, y cuya intensidad se supone que es una función conocida $\frac{i}{y}$ de la distancia $PA =$ y y más generalmente una función f (y).

También se sabe que la acción de un elemento mm' sobre P es proporcional al seno del ángulo Plm', por la función $\phi(r)$ de la distancia PI.

Esto plantea, sabiendo $f(y)$ y se pide encontrar $\phi(r)$.

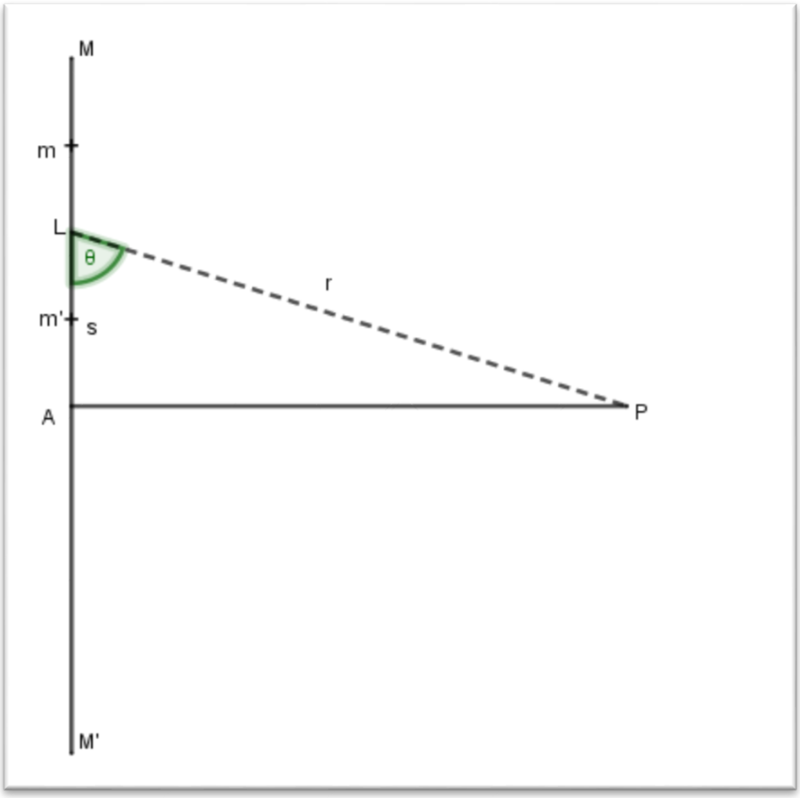


Figura 6: representación gráfica del problema 2.

Para Liouville solucionar este problema en primer lugar mencionó que se está basando en un resultado ya conocido (**CC**), es decir parte de un experimento realizado por el geómetra Laplace, en el cual ya se encontró el valor de $\phi(r) = \frac{1}{r^2}$. La diferencia fundamental entre el planteamiento de este problema por Laplace y Liouville, es que Laplace supone que el comportamiento de la función $\phi(r)$ es de la forma r^n mientras que Liouville dejó el valor de $\phi(r)$ enteramente indeterminado, aludiendo que suponer que $\phi(r)$ es de la forma r^n es una suposición inútil, dado que se puede encontrar el valor de esta función sin realizar esta suposición.

Ahora bien, para Liouville solucionar este problema considera las siguientes igualdades $AL = s$, $mm' = ds$, $\measuredangle PLm' = \theta$ y la acción de mm' sobre P será según la hipótesis del problema es igual a

$$\phi(r) \sin \theta \, ds. \qquad (3.7)$$

Además, si se observa el triángulo rectángulo ALP (figura 6) y empleando el teorema de Pitágoras se tiene que

$$AL \text{ o } r = \sqrt{s^2 + y^2} \tag{3.8}$$

y

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{s^2+y^2}}. \tag{3.9}$$

Por lo tanto, al sustituir el valor de (3.9) y (3.8) en (3.7) se tiene que

$$\phi(r)\sin\theta\, ds = \frac{y\,\phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)}{\sqrt{s^2+y^2}} ds \tag{3.10}$$

Para determinar esta acción y la de los otros elementos sobre el plano Pmm' basta con añadirlas para obtener una resultante, que debe ser igual a $f(y)$.

Así, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\,\phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)}{\sqrt{s^2+y^2}} ds$$

debe ser igual a $f(y)$; y como integrar de $-\infty$ y ∞ es equivalente al doble de la integrar de 0 a ∞ por la simetría del suceso. En consecuencia, la expresión anterior se puede representar como

$$2\int_{0}^{\infty} \frac{y\,\phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)}{\sqrt{s^2+y^2}} ds = f(y),$$

que es equivalente a

$$\int_{0}^{\infty} \frac{y\,\phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)}{\sqrt{s^2+y^2}} ds = \frac{f(y)}{2y} \tag{3.11}$$

Note que, el cociente $\frac{\phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)}{\sqrt{s^2+y^2}}$ es una función de $\sqrt{s^2+y^2}$, por lo cual Liouville considera la expresión

$$\frac{\phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)}{\sqrt{s^2+y^2}} = F\left(\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)^2\right), \tag{3.12}$$

al sustituir el valor de (3.12) en (3.11) se llega a

$$\int_{0}^{\infty} F(s^2+y^2) ds = \frac{f(y)}{2y}. \tag{3.13}$$

Por otro lado, al emplear el resultado del teorema (C) presentado en la sección anterior para $s = \alpha, x = y$ y $\mu = \frac{1}{2}$ se obtiene la ecuación

$$\int_0^{\infty} F(s^2+y^2)ds = \frac{\sqrt{-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\int^{\frac{1}{2}} F(y^2)d(y^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.14)$$

por transitividad entre (3.13) y (3.14) y como $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ se llega a

$$\frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{2}\int^{\frac{1}{2}} F(y^2)d(y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{f(y)}{2y}. \qquad (3.15)$$

Al considerar la sustitución $z = y^2$, (3.15) se puede reescribir de la forma

$$\int^{\frac{1}{2}} F(z)dz^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{f(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \qquad (3.16)$$

y al realizar la derivada un medio a ambos lados de (3.16) da como resultado

$$F(z) = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{d\left(\frac{f(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right)}{dz^{1/2}}. \qquad (3.17)$$

Por otra parte, al sustituir el valor de (3.8) en (3.12) se tiene que

$$\frac{\phi(r)}{r} = F(r^2) \text{ o } \phi(r) = rF(r^2) \qquad (3.18)$$

al cambiar r^2 por z que es permitido, la expresión (3.18) se puede reescribir como

$$\phi(r) = -r.\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{d\left(\frac{f(r^2)}{r}\right)}{d(r^2)^{1/2}}, \qquad (3.19)$$

que es la ecuación que da solución al problema planteado.

Al emplear la ecuación anterior para el caso de esta naturaleza, es decir para

$$f(r) = \frac{i}{r}.$$

Entonces, la expresión (3.17) puede verse expresada como

$$F(z) = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{d\left(\frac{1}{z}\right)}{dz^{1/2}}, \qquad (3.20)$$

dado que si $f(r) = \frac{i}{r}$ entonces $f\left(\sqrt{z}\right) = \frac{i}{\sqrt{z}}$; y empleando la definición dada en (1.2) para $\mu = \frac{1}{2}$ se obtiene de (3.20) que

$$F(z) = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{z^{3/2}}$$

Como $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, y si $r = \sqrt{z}$ $(z^{3/2} = r^3)$ la igualdad anterior queda expresada como

$$F(r^2) = \frac{1}{2r^3}$$

y al sustituir este resultado en (3.18) se tiene

$$\phi(r) = r.\frac{1}{2r^3},$$

llegando finalmente a

$$\phi(r) = \frac{1}{2r^2}$$

que era lo que se desea encontrar.

Respecto a este problema Liouville mencionó que se encuentra un resultado ya conocido y avalado por todos los físicos. Es decir, que la acción de un polo magnético sobre un elemento de corriente eléctrica se ejerce en proporción inversa al cuadrado de la distancia r, y si se representa la acción total del MM' sobre el polo P por una función de y distinta de $\frac{i}{y}$ no se obtendría el resultado $\phi(r) = \frac{1}{2r^2}$. Sin embargo, en cualquier caso usando el cálculo fraccionario se encontraría el resultado.

3.3.3 Problema 3: atracción entre dos líneas de corriente

> *Les divers élémens mm' de AB (fig. 4) exercent sur les élémens nn' de $A'B'$ une action dirigée suivant II' et représentée par la formule :*
>
> $$ds\, ds'\, \Phi(r)\,(1 + (k - 1)\cos^2\theta);$$
>
> *on connaît l'expression $\frac{il}{y}$ de la résultante de ces actions : cela posé, on demande quelle doit être la fonction $\Phi(r)$ pour satisfaire à cette condition qu'on impose à la résultante.*

Figura 7: enunciado del problema 3

Este problema tiene una aplicación directa nuevamente a la electrodinámica y puede ser considerado una generalización del problema anterior. Es decir, esté también tiene como objetivo determinar la función distancia entre dos elementos que interactúan bajo ciertas condiciones. Específicamente, el interés de este problema es determinar cómo varía la distancia cuando interactúan dos hilos de corriente, como puede apreciarse en la figura 8.

Además, como en el problema anterior el propósito de Liouville es probar un resultado ya conocido por los físicos, empleando los fundamentos teóricos del cálculo fraccionario. Estableciendo una vez más, algunas diferencias con los procesos ya realizados por otros medios o fundamentos teóricos, como por ejemplo suponer que la función $\phi(r)$ es de la forma r^n.

En este sentido, el problema tres es el siguiente:

Los diversos elementos mm' de AB (figura 8) ejercen sobre los elementos nn' de A'B' una acción dirigida II' que es representada por la fórmula

$$dsds'\phi(r)(1+(k-1)cos^2\theta).$$

Donde la expresión $\frac{i\,l}{y}$ es la resultante de estas acciones, preguntó cuál debe ser la función $\phi(r)$ para satisfacer la condición que imponemos a la resultante.

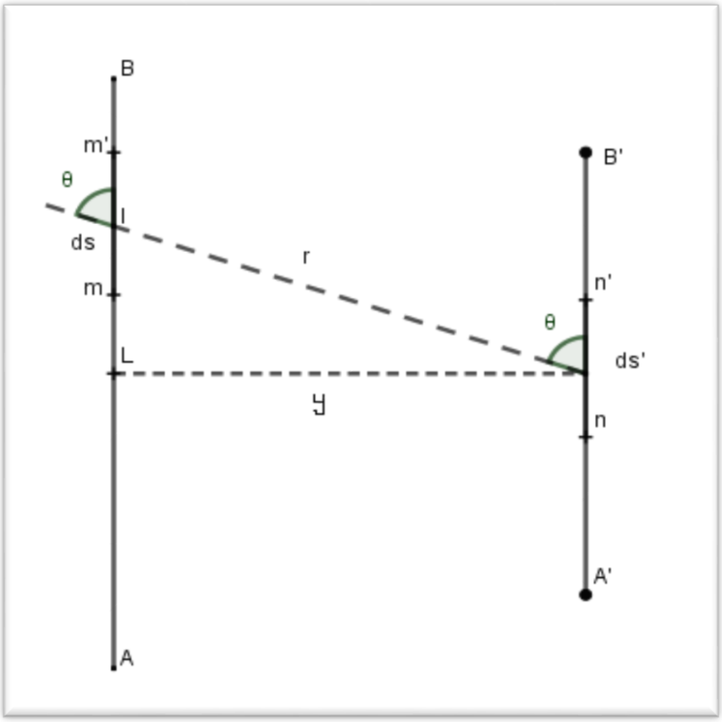


Figura 8: representación gráfica del problema 3.

Considerando, la simetría de la figura 8 es claro que la resultante actuará perpendicularmente a la dirección común de las corrientes. Así, al descomponer $I'L$ según la acción de mm' sobre nn', para ello se multiplica por sin θ y se tendrá

$$dsds'\phi(r)(1+(k-1)cos^2\theta)sin\theta$$

como resultado. Además, al integrar esta cantidad en toda la extensión de las dos corrientes, es decir con respecto a s de $-\infty$ a ∞ y con respecto a s' de $s' = 0$ a $s' = l$ se tendrá que la fuerza con la que $A'B'$ es atraída por AB será:

$$\int_0^l ds' \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r)(1 + (k-1)cos^2\theta)sin\theta\, ds,$$

lo que es equivalente a

$$2l \int_0^{\infty} \phi(r)(1 + (k-1)cos^2\theta)sin\theta\, ds,$$

o

$$2l \int_0^{\infty} \phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)\left(1 + (k-1)\frac{s^2}{s^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{s^2+y^2}} ds. \qquad (3.21)$$

Dado que, al observar las características del triángulo ILI' (figura 8) y al denotar a IL por s y $I'L$ por y se tiene que

$$r = \sqrt{s^2+y^2}, \cos\theta = \frac{s}{\sqrt{s^2+y^2}} \text{ y } \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{s^2+y^2}}$$

Ahora bien, por hipótesis del problema la expresión (3.21) deberá ser igual a $\frac{il}{y}$ que es la resultante de la acción de AB sobre $A'B'$, y al cancelar unos valores se obtienen la ecuación

$$2\int_0^{\infty} \phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)\left(1 + (k-1)\frac{s^2}{s^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{s^2+y^2}} ds = \frac{i}{y}, \qquad (3.22)$$

de la cual se deducirá el valor de la función ϕ.

Al emplear un razonamiento similar al del problema anterior para la expresión $\frac{\phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)}{\sqrt{s^2+y^2}}$. Liouville denotó por F una función que cumple con la característica de (3.18) obteniendo que

$$\frac{\phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)}{\sqrt{s^2+y^2}} = F(s^2+y^2).$$

Por lo tanto, al sustituir este valor en (3.22) se tiene

$$\int_0^{\infty} \left(1 + (k-1)\frac{s^2}{s^2+y^2}\right)F(s^2+y^2)\, ds = \frac{i}{2y^2}, \qquad (3.23)$$

donde al aplicar la propiedad distributiva al lado derecho de (3.23) se evidencia que $\frac{i}{2y^2}$ es igual a la suma de las dos integrales definidas

$$\int_0^\infty F(s^2+y^2)\,ds,$$

$$(k-1)\int_0^\infty \frac{s^2F\left(s^2+y^2\right)ds}{s^2+y^2}\,.$$

Las cuales, pueden ser trasformadas en integrales fraccionarias considerando el resultado del teorema (C) para $u=\frac{1}{2}$ y $u=\frac{3}{2}$ respectivamente. Para $u=\frac{1}{2}$ se tiene que

$$\int_0^\infty F(s^2+y^2)\,ds=\frac{\sqrt{-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\int^{\frac{1}{2}}F(y^2)d(y^2)^{\frac{1}{2}}\,, \qquad (3.24)$$

y para $u=\frac{3}{2}$ se tiene que

$$\int_0^\infty F(s^2+y^2)s^2\,ds=\frac{(-1)^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2}\int^{\frac{3}{2}}F(y^2)d(y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Así, al considerar el instante en que se calcula la intensidad total, la distancia r y y serán similares dándose la igualdad

$$\int_0^\infty \frac{s^2F\left(s^2+y^2\right)ds}{s^2+y^2}=-\frac{\sqrt{-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2}\int^{\frac{3}{2}}\frac{F\left(y^2\right)}{y^2}d(y^2)^{\frac{3}{2}}. \qquad (3.25)$$

Dado que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, al sustituir los valores de (3.24) y (3.25) en (3.23) se obtiene como resultado

$$\int^{\frac{1}{2}}F(y^2)d(y^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1-k}{2}\int^{\frac{3}{2}}\frac{F\left(y^2\right)}{y^2}d(y^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{i}{\sqrt{-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)y^2}, \qquad (3.26)$$

y al sustituir $y^2=z$ la expresión (3.26) se presenta como

$$\int^{\frac{1}{2}}F(z)dz^{\frac{1}{2}}+\frac{1-k}{2}\int^{\frac{3}{2}}\frac{F(z)}{z}dz^{\frac{3}{2}}=\frac{i}{\sqrt{-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)z}\,. \qquad (3.27)$$

Al derivar fraccionalmente para $\mu=\frac{1}{2}$ a ambos lados de (3.27)

$$F(z)+\frac{1-k}{2}\int\frac{F(z)}{z}dz=\frac{i}{2z\sqrt{z}} \qquad (3.28)$$

La expresión (3.28) puede ser representada como una ecuación diferencial lineal no homogénea, considerando la sustitución $\int\frac{F(z)}{z}dz=P$, reescribiéndose (3.28) como

$$z\frac{dp}{dz}+\left(\frac{1-k}{2}\right)P=\frac{i}{2z\sqrt{z}}$$

la cual da como solución

$$P \text{ o } \int \frac{F(z)}{z}dz=\frac{C}{Z^{\frac{(1-k)}{2}}}-\frac{i}{(k+2)}\frac{1}{z\sqrt{z}} \qquad (3.29)$$

como C es una constante arbitraria, al derivar a ambos lados de (3.29) y de multiplicar por z a ambos lados de la igualdad se llega a

$$F(z)=-\frac{(1-k)C}{2z^{\frac{1-k}{2}}}+\frac{3i}{2(k+2)}\frac{1}{z\sqrt{z}}. \qquad (3.30)$$

Cambiando z por r^2 y recordando que $\phi(r)$ y $F(r^2)$ están relacionados por la expresión (3.18) se concluye que

$$\phi(r)=r.F(r^2)$$

$$\phi(r)=r\left(-\frac{(1-k)C}{2r^{1-k}}+\frac{3i}{2(k+2)}\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\phi(r)=-\frac{(1-k)C}{2r^{-k}}+\frac{3i}{2(k+2)}\frac{1}{r^2} \qquad (3.31)$$

Que todavía contiene una constante arbitraria.

Respecto a la solución de este problema Liouville mencionó algunos aspectos importantes y que de una u otra forma se ven involucrados en el desarrollo del cálculo fraccionario como lo discutiremos más adelante.

Entre los comentarios dados por él, en primer lugar destacó que las construcciones teóricas utilizadas para desarrollar este problema no son suficientes para encontrar la función $\phi(r)$ o al menos como se esperaba $\phi(r)$ de la forma $\frac{1}{r^2}$. Por el contrario se encontró que el comportamiento de esta función puede ser además de este orden, y de orden $\frac{1}{r^{-k}}$ el cual es positivo cuando $k>0$, y cuando $k<0$ el comportamiento entre las dos líneas de corriente genera una fuerza de repulsión.

Otro de los aspectos que Liouville mencionó, es que el señor M. Ampere nunca afronto la dificultad de la constante arbitraria, dado que él de entrada suponía que el comportamiento de la función $\phi(r)$ era de la forma Ar^n. De hecho, si eso se diera el valor de C sería igual a cero y el valor de $\phi(r)$ dado en (3.31) quedaría reducido a

$$\phi(r) = \frac{3i}{2(k+2)}\frac{1}{r^2}$$

que es el valor aceptado por todos los físicos. Sin embargo, Liouville opta por no tomar esta hipótesis que es precisamente lo que hace innovador la resolución de este problema con el cálculo fraccionario. Además de que se perderían generalidades del problema; y que si se analiza a fondo la acción de la línea de corriente AB sobre $A'B'$ es cierto que no se encontraría nada que pueda ser explicado por el valor de $\phi(r)$ en (3.31) si no es que necesariamente $C = 0$.

En relación con el comentario anterior, Liouville decidió probar que la constante C puede permanecer arbitraria, y que lo plateado en el problema tres sucedería sin inconvenientes. Debido a, que el término

$$-\frac{(1-k)C}{2r^{-k}}$$

se destruye asimismo cuando la línea de corriente AB ejerce una acción sobre $A'B'$.

3.3.4 Problema 4: interacción entre dos cuerpos el caso de dos paralelepípedos

Les divers élémens mm' de la droite indéfinie AB (fig. 5) exercent sur les élémens nn' de la droite $A'B'$, dont la longueur $= l$, une action attractive fonction de la simple distance $II' = r$, savoir $\varphi(r)$; on connaît l'expression de la résultante de ces actions, laquelle est une fonction $lf(y)$ de la plus courte distance $I'L = y$ des parallèles AB, $A'B'$. Cela posé, on demande quelle doit être la fonction $\varphi(r)$ pour que la force produite entre les deux droites soit en effet $lf(y)$.

Figura 9: enunciado del problema 4

Los dos problemas anteriores estaban relacionados con electromagnetismo, particularmente con fuerzas de atracción que emanaban de dos hilos conductores. Estas fuerzas, no sólo dependían de la distancia sino también de la dirección en la cual eran ejercidas.

En este sentido, el interés de Liouville en esté problema y en el siguiente es ampliar las nociones abordas en los dos casos anteriores y pasar de la interacción entre elementos infinitamente pequeños (como son las cargas electromagnéticas, que hacen parte de los hilos conductores) a elementos finitos. El objetivo de esta situación es determinar la función distancia cuando interactúan dos elementos con masa finita, es decir se pasa del estudio de fuerzas de atracción de electromagnetismo a fuerzas de atracción universal, en virtud de las moléculas de todos los cuerpos que tienden entre sí.

Bajo este contexto, la situación que planteó solucionar Liouville y del cual se desprenden los problemas cuatro y cinco es el siguiente:

Sea AB dos sustancias materiales, tales que las partículas de A atraen a las de B, y viceversa. La teoría de su atracción será obviamente completa sólo mientras el siguiente problema pueda ser resuelto: *Dado cualesquiera dos volúmenes V, W, el primer compuesto de la sustancia A, el segundo compuesto de la sustancia B, estos volúmenes V, W se colocan en cualquier posición relativa, y las fuerzas que serán producidas por su acción mutua en esta posición son requeridas.*

Para solucionar esta situación Liouville consideró tres casos: el primero con V y W con masas infinitamente pequeñas; el segundo con el volumen V con masa finita y W con masa infinita; y por último los volúmenes V y W con masa finita. De los cuales se desprenden los problemas los problemas 4 y 5 que describiremos más adelante, donde el problema cuatro corresponde a la interacción de estos volúmenes con masa infinitamente pequeña y en forma de paralelepípedo y el cinco obedece a la interacción entre un punto y una esfera.

Antes de presentar en si el enunciado correspondiente al problema cuatro, Liouville realizó un comentario relacionado con el planteamiento de esté. En este comentario, hace referencia a que las porciones infinitamente pequeñas consideradas, deben tener ciertas características geométricas esto para facilitar los cálculos. Respecto, a estas características señala lo siguiente: considérese el paralelepípedo P de la sustancia A, que ejerce una fuerza de atracción sobre un paralelepípedo Q de la sustancia B; de tal forma que los lados correspondientes de estos paralelepípedos son paralelos.

Adicional a las condiciones anteriores, Liouville precisó que estudiara la atracción entre los paralelepípedos P y Q en dos dimensiones, esto con la finalidad de hacer el problema más sencillo. Particularmente, estudió la cuestión en que se ha hecho que una línea indefinida AB (figura 10) actúe sobre una línea paralela y limitada $A'B'$.

Finalmente, el enunciado del problema cuatro es el siguiente:

Los diversos elementos mm' de la línea indefinida AB (figura 10) ejercen sobre los elementos uno de la línea $A'B'$, cuya longitud $= l$, una acción atractiva que es una función de la distancia simple II' = r, encontrar $\phi(r)$; si conocemos la expresión de la resultante de estas acciones que es una función $lf(y)$ de la distancia más corta $I'L = y$ de las paralelos AB, $A\,'B'$. Esto plantea, preguntamos cuál debe ser la función $\phi(r)$; de modo que la fuerza producida entre las dos rectas es realmente $lf(y)$.

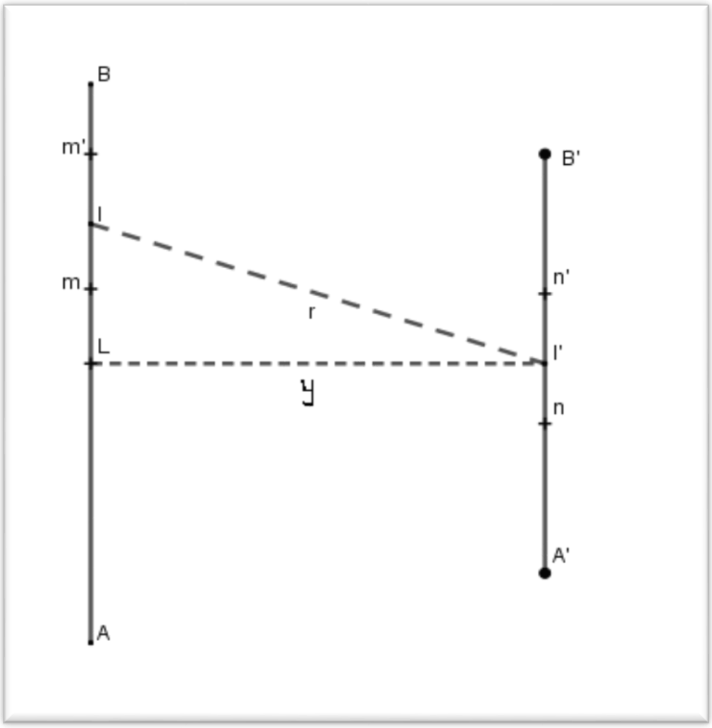


Figura 10: representación gráfica de la interacción entre los lados de los paralelepípedos P y Q con masas infinitamente pequeñas

Para solucionar este problema, Liouville lo primero que realiza es nombrar los elementos ds, ds' y los elementos mm', nn' para obtener

$$dsds'\phi(r).$$

Acto seguido, determina la expresión de su acción mutua dada por

$$dsds'\phi(r)\ \cos(II'L),$$

en relación con su componente a lo largo de la dirección $I'L$, que es el total de la resultante. Luego, al hacer $IL = s$ y observado las relaciones del triángulo rectángulo $II'L$ se tiene que

$$r = \sqrt{s^2 + y^2} \text{ y } \cos(II'L) = \frac{y}{\sqrt{s^2+y^2}},$$

de tal forma, que la expresión de la acción mutua queda representada por

$$ydsds'\frac{\phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)}{\sqrt{s^2+y^2}}.$$

Note que, la expresión anterior representa la acción de un punto de la recta AB sobre un punto $A'B'$ y el interés es conocer la acción sobre todos los puntos de ambas rectas, así para conocer esta acción total es necesario integrar en toda la extensión de estas rectas. Particularmente, en los intervalos de $-\infty$ a ∞ para AB y de $s' = 0$ a $s' = l$ para $A'B'$. Lo cual por hipótesis será igual a $lf(y)$, obteniéndose la igualdad

$$ly\int_{-\infty}^{\infty} ds\frac{\phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)}{\sqrt{s^2+y^2}} = lf(y).$$

Que será equivalente a (3.32) considerando que integral de $-\infty$ a ∞ es equivalente al doble de 0 a ∞, esto por la simetría de la interacción de las dos líneas,

$$\int_0^{\infty} ds\frac{\phi\left(\sqrt{s^2+y^2}\right)}{\sqrt{s^2+y^2}} = \frac{f(y)}{2y} \qquad (3.32)$$

Ahora bien, es importante precisar que la ecuación (3.32) no difiere de la expresión (3.11). Regresando, a la solución del problema relativo a la interacción de un polo magnético y un elemento de corriente eléctrica. Por lo tanto, Liouville omitió los detalles para solucionar este problema, argumentando que son los mismos detalles abordados anteriormente, concluyendo que la función buscada es

$$\phi(r) = -r.\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{d\left(\frac{f(r^2)}{r}\right)}{d(r^2)^{1/2}},$$

la cual da solución al problema cuatro.

Una vez dada la solución al problema cuatro, Liouville precisó una cuestión alternativa a la trabajada en el problema cuatro. En esta, considera dos segmentos de recta $A'B'$ y $A''B''$ paralelos, y sobre el segmento $A'B'$ al realizar la suma infinita de segmentos de recta $A''B''$ de la cual se compondrá una línea infinita AB. Observándose, que para esta nueva cuestión recae a la solución del problema cuatro. El argumento, de los segmentos de rectas paralelos Liouville lo realiza con el fin de aclarar, que no es necesario conocer por la experiencia la acción de atracción, sino sólo el componente de esta acción, según la dirección normal a su dirección común, porque sólo esta componente sirve para calcular los efectos producidos por la línea indefinida AB.

Al finalizar el estudio del primer caso y las dos cuestiones emergentes solucionadas mediante el problema cuatro, Liouville da a conocer las siguientes condiciones para el caso dos: si el paralelepípedo P es infinitamente pequeño, pregunta acerca de su acción sobre un elemento de Q, conociendo la acción de P sobre el volumen total Q en todas las posiciones posibles.

Para solucionar la cuestión planteada en el caso dos, Liouville pone en consideración lo siguiente: imagine un plano indefinido, que divide el espacio en dos partes iguales, y en una de esas partes se ubica P y en la otra se llena el espacio con el material B formando un sólido indefinido y en el cual está inmerso Q. Calcular la fuerza de atracción o de repulsión sobre P será fácil, porque siempre el sólido indefinido se puede dividir en una serie continua de paralelepípedos todos iguales a Q, paralelepípedos cuya acción sobre P es un dato dado del experimento.

Acto seguido, supone que la acción del sólido indefinido que es atractiva o repulsiva, está representada por una función $F(x)$ de la distancia x desde el punto P hasta la cara extrema de este sólido; la distancia x que se cuenta en la perpendicular bajó del punto P en esta cara. De hecho, es evidente que la acción del sólido indefinido puede depender sólo de la longitud x, y por consiguiente debe ser una función de x.

Después, representó a $\phi(r)$ como la acción desconocida, ejercida a una distancia r por el sólido P sobre un elemento tomado del sólido indefinido y cuya masa sería i y se debe encontrar el valor de $\phi(r)$ de modo que la resultante de todas las acciones elementales sea $F(x)$.

Para ello, se dirige por el punto P una perpendicular a la cara extrema del solido infinito, cuya cara lo separa del vacío del espacio restante, designando O como el punto en que esta perpendicular cruza la cara en cuestión; y de acuerdo con la notación adoptada ahora se tendrá $OP = x$.

Al extender el eje OP una longitud $OM = y$, e imaginar que por el punto M, pasa un plano normal a POM, paralelo a la cara extrema del sólido infinito. Sea N cualquiera de los puntos de este plano a una distancia común $MN = z$ de M. Todos los puntos N estarán en un círculo descrito alrededor del centro M con un radio z, y su distancia al pequeño volumen P será la misma para todos, e igual a $\sqrt{(x+y)^2+z^2}=r$.

Al imaginar el círculo anterior como la base de un cilindro infinitamente pequeño que tiene altura dy y cuyos bordes son paralelos a POM, entonces se realiza otro cilindro similar al primero, pero que lo rodea, específicamente este nuevo cilindro tendrá como base un radio $z+dz$, formando un anillo circular entre estos dos cilindros con volumen $2\pi zdydz$; además, todos los puntos situados sobre este anillo estarán a una distancia r de P.

La acción de este anillo sobre P se puede encontrar, observando que a causa de la simetría de la figura, es dirigida según POM y por lo tanto es necesario tomar la acción de cada molécula de este anillo, así para conocer $\phi(r)$ hay que multiplicarlo por $\frac{x+y}{r}$ para descomponerlo a lo largo de la línea POM, lo que da como resultado $\frac{x+y}{r}\phi(r)$, luego al sumar las cantidades $\frac{x+y}{r}\phi(r)$ extendiendo esta suma a todo el anillo circular; esta última operación equivale a multiplicar $\frac{x+y}{r}\phi(r)$ por el volumen $2\pi zdydz$ del anillo. Por lo tanto la acción de P es $2\pi\frac{x+y}{r}\phi(r)zdydz$. Ahora, al integrar esta expresión en los intervalos $z=0, z=\infty, y=0, y=\infty$ encontramos

$$2\pi\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{x+y}{r}\phi(r)zdydz.$$

Que es la fuerza total con la que el sólido indefinido atrae el paralelepípedo P. La cual por hipótesis debe tener el valor F (x), llegando a la expresión

$$2\pi\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{x+y}{r}\phi(r)zdydz=F(x) \qquad (3.33)$$

Las integrales definidas del primer miembro de la ecuación (3.33) se pueden transformar sin dificultad, a integrales relacionadas con la variable x. Esto, derivando dos veces y poniendo $dF(x)=F'(x)dx$; dando como resultado

$$\phi(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{d\left(\frac{F\prime(x)}{x}\right)}{dx},$$

un valor muy simple, que resuelve la pregunta propuesta cuando es posible.

Como se puede apreciar el valor anterior, solo contienen diferenciales ordinarios lo cual no muestra la aplicabilidad del cálculo fraccionario. Sin embargo, si el sólido indefinido no fuera homogéneo, la cuestión se haría más complicada y dependería de derivadas fraccionarias.

En consecuencia, Liouville supone lo siguiente: que la densidad del solido indefinido en lugar de ser la unidad en todos los puntos, sea proporcional a z, y se represente por $\frac{1}{2}z$. Así, la ecuación que soluciona el problema con esta nueva condición es el siguiente

$$\pi \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x+y}{r} \phi(r) z^2 dy dz = F(x). \qquad (3.34)$$

Designado, como característica f una función nueva y desconocida, es válido considerar

$$\int_0^\infty \frac{\phi(r)}{r} z^2 dz = f(x+y), \qquad (3.35)$$

expresándose (3.34) como

$$\pi \int_0^\infty (x+y) f(x+y) = F(x). \qquad (3.36)$$

Luego, al considerar la sustitución $x+y=\alpha$, $dy=d\alpha$ en la ecuación (3.36) se podrá representar como

$$\pi \int_x^\infty \alpha f(\alpha) d\alpha = F(x),$$

y al derivar a ambos lados en términos de x se tendrá que

$$\pi x f(x) = -F'(x),$$

donde

$$f(x) = \frac{-F'(x)}{\pi x}$$

encontrando la función f (x). Ahora bien, al cambiar x por $x+y$, se tendrá que la función $f(x+y)$ será igual a

$$f(x+y) = \frac{-F\prime(x+y)}{\pi(x+y)}, \qquad (3.37)$$

y al establecer una transitividad entre (3.35) y (3.37) se tendrá

$$\int_0^\infty \frac{\phi(r)}{r} z^2 dz = \frac{-F\prime(x+y)}{\pi(x+y)} \qquad (3.38)$$

ecuación en la que $r = \sqrt{(x+y)^2 + z^2}$.

En la ecuación (3.38) el binomio $x + y$ juega el papel de una sola letra, por lo cual Liouville cambia $x + y$ por ν, reescribiéndose (3.38) como

$$\int_0^\infty \frac{\phi(\sqrt{\nu^2+z^2})}{\sqrt{\nu^2+z^2}} z^2 dz = \frac{-F\prime(\nu)}{\pi\nu}.$$

Adicionalmente, la ecuación anterior puede verse aún más simplificada haciendo

$$\frac{\phi(x)}{x} = \psi(x^2),$$

explícitamente, para el caso en cuestión

$$\frac{\phi(\sqrt{\nu^2+z^2})}{\sqrt{\nu^2+z^2}} = \psi(\nu^2 + z^2).$$

Así, (3.38) quedará reducida a

$$\int_0^\infty \psi(\nu^2 + z^2)\, z^2 dz = \frac{-F\prime(\nu)}{\pi\nu} \qquad (3.39)$$

en donde una vez conocida $\psi(x)$, se podrá deducir $\phi(x)$ que es la función que resuelve este problema.

De hecho, para encontrar $\psi(x)$ es necesario recurrir a los principios del nuevo cálculo para trasformar (3.39) en otra ecuación diferencial fraccionaria, particularmente al teorema C mencionado anteriormente. Por lo tanto, tomando $\mu = 3/2$ en C se tendrá la igualdad

$$\int_0^\infty \psi(\nu^2 + z^2)\, z^2 dz = -\frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{4} \int^{3/2} \psi(\nu^2) d(\nu^2)^{3/2}, \qquad (3.40)$$

al sustituir (3.40) en (3.39) se tendrá que

$$-\frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{4} \int^{\frac{3}{2}} \psi(\nu^2) d(\nu^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{-F\prime(\nu)}{\pi\nu},$$

concluyéndose que

$$\psi(\nu^2) = \frac{4}{\pi\sqrt{\pi}\sqrt{-1}} \frac{d^{3/2}\left[\frac{F\prime(\nu)}{\nu}\right]}{d(\nu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como $\phi(r) = r\psi(r^2)$ se llega a

$$\psi(\nu^2) = \frac{4r}{\pi\sqrt{\pi}\sqrt{-1}} \frac{d^{3/2}\left[\frac{F'(r)}{r}\right]}{d(r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

que es la fórmula que resuelve el problema propuesto.

La derivada indicada en el segundo miembro de la ecuación anterior debe realizarse con respecto a r^2, donde r^2 es la variable independiente. Para esto, Liouville considera establecer $r = \sqrt{z}$ para diferenciarse respecto a z y luego cambiar z por r^2 se tendrá el valor exacto de $\phi(r)$ empleando el nuevo cálculo, resaltando que no es fácil llegar a él de otro modo por un proceso más simple.

Ahora se considera el caso número tres en cual se plantea que los dos paralelepípedos tienen volúmenes finitos. Este caso Liouville mencionó que es fácil de traer de vuelta el caso anterior. Para ello, primero se dibujará un plano paralelo a una de las caras de P, que dividirá el espacio en dos partes, una en la que se encuentre P, la otra concebida homogénea y llena de un material similar al del segundo paralelepípedo Q. Así se formara un sólido infinito cuya acción sobre P es fácil de calcular. De hecho, este sólido puede dividirse en una serie continua de paralelepípedos iguales a Q, que tienen sus bordes homólogos paralelos a los bordes de P. La acción de P y de cualquiera de estos paralelepípedos en los que se divide el sólido infinito, es conocida por la experiencia, deduciéndose de ella, por métodos ordinarios, la acción total ejercida sobre P por el sólido infinito.

Si por el centro de gravedad de P se pasa una perpendicular hasta la cara extrema del sólido infinito, esta línea será paralela a cuatro de los bordes de P y se deslizará estos bordes de modo que el centro de gravedad del paralelepípedo P, al que pertenecen, tiene un movimiento ininterrumpido a lo largo de la normal que se mencionó, y que además no hay alrededor de este normal ningún movimiento de rotación, generándose así un sólido indefinido en cierto sentido, que terminó por un lado en un plano paralelo a su superficie extrema del sólido grande infinito, es decir, en el plano de la base que, en la posición inicial del paralelepípedo P, estaba más próximo a este gran sólido, y además limitado lateralmente por las caras laterales indefinidamente extendidas del paralelepípedo P en su posición primitiva.

En relación con lo anterior Liouville mencionó que para formar una idea del sólido infinito formado de la materia Q y del sólido alargado generado por P, al proyectar nuestros ojos en la figura 11, donde se presenta la situación mencionada reduciéndose las cosas a dos dimensiones para simplificar.

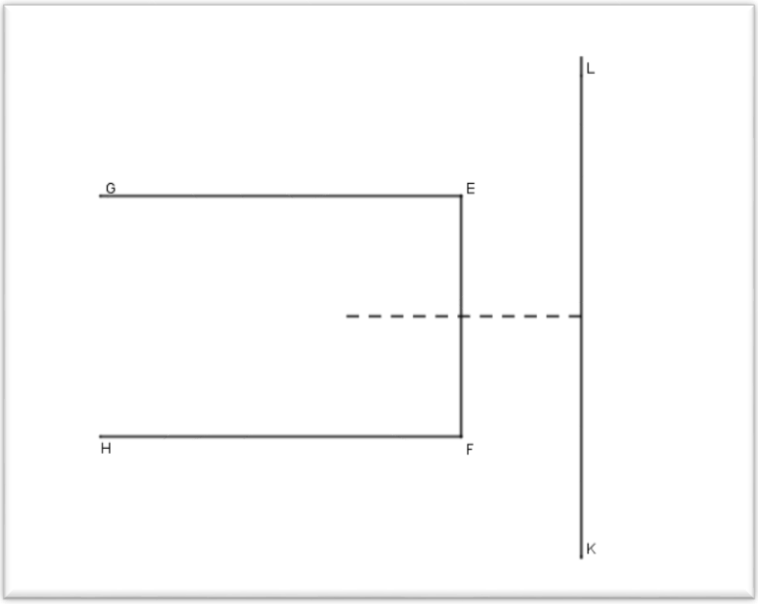


Figura 11: representación gráfica en dos dimensiones del sólido infinito formado de la materia Q y del sólido alargado generado por P.

Por lo tanto, se debe comprender a la línea KL como la traza de un plano y que lo que la está a la derecha de este plano está lleno del material Q. En cuanto al rectángulo EFGH esté es indefinido en cierto sentido, y toma el lugar del paralelepípedo alargado producido por el movimiento de P; su cara EF es un rectángulo paralelo al plano KL en una palabra, EFGH es su proyección en el plano de la figura, y para restablecer su tercera dimensión debe considerarse compuesta de una serie de cortes paralelos e iguales a EFGH que constituyen su espesor.

Este nuevo paralelepípedo alargado se puede dividir en una serie continua de paralelepípedos iguales a P, en la que se conoce la acción del gran sólido infinito, se deduce que siempre será fácil calcular la acción total de este gran sólido sobre el paralelepípedo alargado: esta acción será una función $F(x)$ de la distancia x de las dos caras paralelas de estos dos cuerpos, contando la distancia x en el común normal de estas caras.

Ahora bien, si se cambia x por $x + dx$, dx siendo infinitamente pequeña, la acción del paralelepípedo alargado, que está separado por la distancia $x + dx$, se convertirá en $F\ (x + dx)$. Y la diferencia

$$F\ (x + dx) - F(x) = F'(x)dx,$$

será evidentemente la acción del pequeño sólido de un espesor dx que se obtiene restando los dos paralelepípedos de su base común, dx será el volumen de este sólido elemental. Entonces

$$\frac{F'(x)dx}{wdx} = \frac{F'(x)}{w}$$

es la acción que sería ejercida por el sólido indefinido sobre una molécula que tiene una masa $m = 1$ que se colocaría a la distancia x, de la cual es fácil concluir que al nombrar un volumen muy pequeño $\frac{\nu F'(x)}{w}$ es la acción del gran sólido infinito sobre w a la misma distancia que se conoce, es suficiente con encontrar la acción elemental de dos volúmenes infinitamente pequeños, como se ha resuelto antes.

3.3.5 Problema 5: interacción entre un globo y un punto de su superficie

> *Soit un point matériel M* (fig. 9) *placé à la circonférence d'un cercle dont le diamètre variable MA = x. L'action de la surface du cercle sur le point M est une fonction connue f(x) de ce diamètre; cela posé, on demande proportionnellement à quelle fonction de la distance le point M doit agir sur chaque particule pour que l'attraction du cercle total soit en effet exprimée par f(x).*

Figura 12: enunciado del problema 5

Referente a este tercer caso Liouville consideró nuevas condiciones, particularmente que sucede si se considera la acción de un sólido constante sobre otros solidos de forma o volumen variable de acuerdo con una ley conocida. Está nueva consideración conduce al enunciado del problema cinco, que será descrito más adelante; antes es necesario mencionar algunas cuestiones globales de la situación que se quiere resolver, y además de conocer de un nuevo teorema presentado por Liouville, esto con el fin de tener una nueva herramienta teórica para dar respuesta al nuevo problema en cuestión.

De manera global, la situación que Liouville abordó es la siguiente: supóngase que se ha medido la acción ejercida por un globo de una sustancia A sobre un punto M de su superficie y que esta medida se ha repetido en otros puntos de globos homogéneos al primero, pero de diferentes rayos, para poseer finalmente la ley según la cual la atracción en el punto M depende del rayo. Esta ley será una función f (x) de radio $\frac{x}{2}$, expresando para cada valor de x la resultante de las atracciones de todas las partes del sólido esférico en M; y se trata de deducir de ella una fracción elemental de M de un volumen diferencial de la esfera.

Para solucionar la cuestión anterior, Liouville planteó la necesidad de demostrar un nuevo teorema. Básicamente, este nuevo fundamento teórico está representado por medio de la ecuación:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{x}{sen(\beta)}\right) d\beta = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}x}{2}\int^{\frac{1}{2}} \frac{F(x)}{x^2} d(x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(TE)} \qquad \text{(D)};$$

la cual es una trasformación de la ecuación dada en el Teorema A. Adicionalmente, se menciona que no se presenta un enunciado que acompañe a la expresión D, es decir que de aquí en adelante cuando se haga referencia al Teorema D, se debe relacionar con la ecuación D.

Liouville demuestra el Teorema D partiendo de una igualdad conocida

$$\int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{-1}\sqrt{\pi}\int^{\frac{1}{2}}\varphi(x)dx^{\frac{1}{2}};$$

que es el resultado de sustituir $\mu = 1/2$ en (A). Cambiando x por x^2 la ecuación anterior queda expresada como

$$\int_0^\infty \varphi(x^2+\alpha)\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{-1}\sqrt{\pi}\int^{\frac{1}{2}}\varphi(x^2)d(x^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.41).$$

Después denota una nueva función F que está relacionada con la función φ por medio de la ecuación

$$\varphi(x) = \frac{F(\sqrt{x})}{x};$$

al cambiar x por x^2

$$\varphi(x^2) = \frac{F(x)}{x^2}$$

y x^2 por $x^2 + \alpha$

$$\varphi(x^2+\alpha) = \frac{F(\sqrt{x^2+\alpha})}{x^2+\alpha}.$$

Luego, al reemplazar el valor de $\varphi(x^2+\alpha)$ y $\varphi(x^2)$ en (3.41) se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{F(\sqrt{x^2+\alpha})}{x^2+\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{-1}\sqrt{\pi}\int^{\frac{1}{2}} \frac{F(x)}{x^2}\, d(x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.42).$$

Al cambiar la variable de integración α, así como sus límites de integración; por una nueva variable β, tal que β y α se relacionan de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{x^2}{\tan^2(\beta)}.$$

En consecuencia, $d\alpha$ será

$$d\alpha = -\frac{2x^2 d\beta}{\tan(\beta)\operatorname{sen}^2(\beta)};$$

y los intervalos de integración $\alpha = 0$, $\alpha = \infty$ cambiaran a $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$; así al sustituir los valores anteriores en (3.42) y realizando los respectivos se obtendrá la expresión

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\beta\, F\left(\frac{x}{\operatorname{sen}\beta}\right) = -\frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}x}{2}\int^{\frac{1}{2}} \frac{F(x)}{x^2}\, d(x^2)^{\frac{1}{2}},$$

que difiere un poco de la ecuación del Teorema D. Sin embargo, Liouville aludió que para completar la demostración, es suficiente con demostrar que al invertir los limites 0 y $\frac{\pi}{2}$ se cambia el signo de la integral, llegando finalmente a la ecuación (D).

Una vez Liouville demostró esté nuevo teorema, plantea la posibilidad de dar respuesta al planteamiento inicial. Para ello, él indica que se guio por el paso analítico empleado en los problemas anteriores, transformando ciertas integrales definidas en diferenciales fraccionales indefinidas. Sin embargo, para evitar una complicación innecesaria en los cálculos, reemplazará las esferas por círculos, abstrayendo así una dimensión del espacio. Por medio de esta simplificación, queda sólo para tratar el problema de que esta es la declaración.

En relación con lo mencionado anteriormente el enunciado del problema cinco es el siguiente:

Deje un punto material M (figura 13) situado en la circunferencia de un círculo cuyo diámetro variable MA = x. La acción de la superficie del círculo sobre el punto M es una función conocida f (x) de este diámetro; es decir, proporcionalmente a qué función de la distancia el punto M debe actuar sobre cada partícula, de modo que la atracción del círculo total se expresa de hecho por f (x).

Ahora bien, para solucionar este problema Liouville prolonga el segmento dado $MA = x$ una distancia $AB = dx$, y lo describe como el diámetro un nuevo circulo cuya acción sobre M será $f(x + dx)$. La diferencia entre la fuerza producida por el círculo inicial y el de la expansión final será

$$f(x + dx) - f(x) \text{ o } f`'(x)dx.$$

Específicamente, la expresión anterior representa la acción ejercida sobre el punto M por la superficie entre la circunferencia de diámetro MA y la circunferencia de diámetro MB.

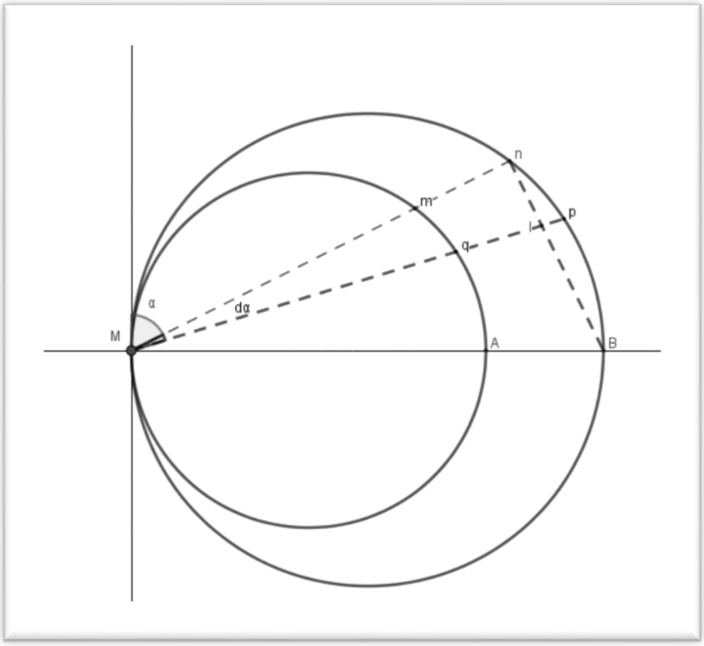


Figura 13: representación gráfica del problema 5.

Después, considera dos rayos infinitamente vecinos Mmn y Mpq, que forman un ángulo $d\alpha$ entre ellos, y un ángulo α entre Mmn y la tangente My de los círculos. La superficie diferencial $mpqn$ tiene como medida el producto de mn por ni, de su base mn y su altura ni como puede apreciarse en la figura 13. Además, se asegura lo siguiente

$$mn = Mn - Mm = sen(\alpha)d\alpha,$$

$$ni = Mn.d\alpha = xsen(\alpha)d\alpha$$

de lo que se concluye que

$$mpqn = mn.ni = xsen^2(\alpha)d\alpha dx.$$

Al multiplicar el valor de la superficie $mpqn$ por una función $\phi(xsen(\alpha))$ de la distancia $Mn = xsen(\alpha)$; este producto expresará la acción del elemento $mpqn$ sobre el punto M. Y al multiplicar nuevamente esta acción por $sen(\alpha)$ se tendrá la componente de MA, es decir, la componente a lo largo de la dirección de la resultante total.

La componente mencionada, está representada por la expresión

$$xsen^3(\alpha)\phi(xsen(\alpha))d\alpha dx.$$

Integrando esta cantidad respecto a α y entre los limites $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$; o lo que es equivalente al doblar la integral $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se obtendrá la expresión de la fuerza con la que la pequeña superficie entre las circunfereencias con diametros MA y MB actua sobre el punto M. La cual como se mencionó anteriormente es a igual a $f`'(x)dx$, dando como resultado la ecuación

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsen^3(\alpha)\phi(xsen(\alpha))\, d\alpha = f'(x). \qquad (3.43)$$

Al multiplicar por x^2 a ambos lados de (3.43) y luego cambiar x por $\frac{1}{z}$; esto para acercarse a lo expresado en la ecuación (D), se tendrá

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen^3(\alpha)}{z^3}\phi\left(\frac{sen(\alpha)}{z}\right) d\alpha = \frac{1}{z^2}f'\left(\frac{1}{z}\right). \qquad (3.44)$$

En consecuencia, para dar una integral definida similar a la de la ecuación (D) se designa una función F tal que:

$$\frac{1}{z^3}\phi\left(\frac{1}{z}\right) = F(z);$$

por lo tanto,

$$\frac{sen^3(\alpha)}{z^3}\phi\left(\frac{sen(\alpha)}{z}\right) = F\left(\frac{Z}{sen(\alpha)}\right).$$

Así, la ecuación (3.44) se convierte en

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{Z}{sen(\alpha)}\right) d\alpha = \frac{1}{z^2}f'\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (3.45);$$

y, de acuerdo con la fórmula (D) el primer miembro de (3.45) es igual a

$$\sqrt{-1}\sqrt{\pi}z\int^{\frac{1}{2}} \frac{F(z)}{z^2}\, d(z^2)^{\frac{1}{2}};$$

concluyéndose la siguiente ecuación en diferenciales fraccionales

$$\sqrt{-1}\sqrt{\pi}\int^{\frac{1}{2}}\frac{F(z)}{z^2}d(z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{z^3}f'\left(\frac{1}{z}\right);$$

lo que da

$$F(z)=\frac{z^2}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\,\frac{d^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{z^3}f\prime\left(\frac{1}{z}\right)\right]}{d(z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Por otro lado, el objetivo es encontrar la función $\phi\,(x)$, la cual se encuentra relacionada con $F(z)$ por medio de la expresión

$$\frac{1}{z^3}\phi\left(\frac{1}{z}\right)=F(z)$$

establecida previamente. Adicionalmente, se precisa que si se conoce F o ϕ se puede conocer al otro. De esta relación también se obtiene que

$$\phi\left(\frac{1}{z}\right)=z^3F(z)$$

entonces, al cambiar z por $\frac{1}{x}$:

$$\phi(x)=\frac{F\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3};$$

llegando a la fórmula definitiva

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}x^5}\frac{d^{\frac{1}{2}}[x^3f\prime(x)]}{d\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

que hace conocida la función $\phi(x)$, cuya ley elemental de atracción depende de ella y que resuelve el problema propuesto.

Por otra parte, Liouville dio apreciaciones importantes en relación con los problemas resueltos. Mencionando, que estos problemas se refieren a una nueva rama de las teorías mecánicas, cuyo objetivo era obtener las fuerzas elementales, sabiendo la ley que sigue una serie regular de los casos individuales, y la resultante de estas fuerzas elementales.

Mencionó además, que el objeto que se propone en esta parte de su ciencia es volver de los efectos a las causas. Hay, una cierta analogía entre las investigaciones de esta especie y este problema general, que es el primero de la dinámica: *Dada las leyes de* *un movimiento, determina la fuerza que la produce*. Sabiendo que el problema se resuelve inmediatamente por cálculo diferencial, ya que las fuerzas de aceleración a lo largo de cada uno de los ejes ox, oy y oz son proporcionales a las segundas coordenadas diferenciales x, y, z consideradas como una función del tiempo. De la misma manera, en las cuestiones que acabaron de discutir, la ley elemental de la atracción, que es el desconocido cuyo valor se buscó, se expresa casi inmediatamente en las derivadas fraccionarias.

Finalizando, con el comentario de que los diferenciales con cualquier orden no son, un simple juego de análisis, tienen una conexión necesaria tanto con la mecánica, como con la mayoría de los fenómenos naturales.

3.3.6 Problema 6: la tautochrone en el vacío

Déterminer la courbe AMB de manière que le temps employé par un corps pesant, qui glisse sur cette courbe, à aller de M en A, soit une fonction donnée $f(h)$ de la hauteur verticale $MP = h$, qui sépare M de A.

Figura 14: enunciado del problema 6

Un problema clásico y que hace parte del epistemología del cálculo fraccionario es el problema de la tautochrone; que como se mencionó anteriormente fue una la primera aplicación de este tema dada por Abel en 1823. Liouville en esta memoria aborda este problema, solucionándolo de forma alternativa a como lo realizó Abel. Dado que Liouville, utilizó constructos teóricos dados por él. Y además se cree que Liouville no conocía los aportes de Abel a este nuevo campo.

Antes de enunciar el problema de la tautochrone es prudente revisar tres nuevas ecuaciones dadas por Liouville; que le fueron de utilidad para resolver el problema en cuestión. Adicionalmente, es importante precisar que estas igualdades, representan nuevos aportes teóricos al cálculo fraccionario dado por Liouville.

La primera ecuación a la que Liouville alude es la siguiente:

$$\int_0^1 \phi\left(\frac{\theta}{x}\right)(1-\theta)^p d\theta = (-1)^{p+1} x\Gamma(p+1)\int^{p+1} dx^{p+1} \frac{\phi\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{p+2}}; \qquad \textbf{(TE)} \qquad \text{(E)}$$

la cual puede ser demostrada desarrollando en los dos miembros la función ϕ de acuerdo con las potencias de su variable. Denotando por $\sum A_m x^m$ el desarrollo de $\phi(x)$ se tiene que

$$\phi(x) = \sum A_m x^m;$$

en consecuencia

$$\phi\left(\frac{\theta}{x}\right) = \sum A_m \left(\frac{\theta}{x}\right)^m.$$

Por otra parte, al designar a $\leftthreetimes$ como la integral que forma el primer miembro de la ecuación (E), y sustituyendo en esta el valor de $\phi\left(\frac{\theta}{x}\right)$ se tiene que

$$\leftthreetimes = \sum \frac{A_m}{x^m} \int_0^1 \theta^m (1-\theta)^p \, d\theta. \qquad (3.46)$$

Donde la integral $\int_0^1 \theta^m (1-\theta)^p \, d\theta$ en palabras de Liouville está incluida lo Legendre llama la integral euleriana de la primera especie; en aras de que ya se sabía de la existencia de integrales eulerianas de primer tipo y las de segundo tipo (**CC)**. Además, esta integral satisface la igualdad

$$\int_0^1 \theta^m (1-\theta)^p \, d\theta = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+p+2)}. \qquad (3.47)$$

La cual para la época ya había sido demostrada por M Poisson según Liouville.

Al sustituir el valor (3.47) en (3.46) la integral $\leftthreetimes$ queda expresada como:

$$\leftthreetimes = (-1)^{p+1} x \, \Gamma(p+1) \sum \frac{A_m}{x^m} \cdot \frac{(-1)^{-p-1}\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+p+2)}.$$

Donde $\leftthreetimes$ puede ser simplificada empleando la ecuación (1.7) descrita en la sección 3.1 haciendo $\mu = -p-1$ y $n = m+p+2$ llegando a

$$\leftthreetimes = (-1)^{p+1} x \, \Gamma(p+1) \sum A_m \int^{p+1} \frac{dx^{p+1}}{x^{m+p+2}};$$

y al invertir el orden de los signos Σ y $\int$ se tendrá

$$\leftthreetimes = (-1)^{p+1} x \, \Gamma(p+1) \int^{p+1} \frac{dx^{p+1}}{x^{p+2}} \sum \frac{A_m}{x^m};$$

que no difiere de la ecuación (E), dado que $\sum \frac{A_m}{x^m} = \phi\left(\frac{1}{x}\right)$ y que $\leftthreetimes$ es el primer miembro de la ecuación. Lo anterior demuestra (E).

Respecto de la segunda y tercera ecuación que alude Liouville, se menciona que los resultados son inmediatos de (E). Por ejemplo la ecuación:

$$\int_0^1 \phi(\theta x)(1-\theta)^p d\theta = (-1)^{p+1}\frac{\Gamma(p+1)}{x}\int^{p+1} d\left(\frac{1}{x}\right)^{p+1}\phi(x)x^{p+2} \qquad \textbf{(TE)} \quad \text{(F)}$$

es el resultado de cambiar x por $\frac{1}{x}$ en (E). Y la ecuación:

$$\int_0^x \phi(z)(1-z)^p dz = (-1)^{p+1}x^p\Gamma(p+1)\int^{p+1} d\left(\frac{1}{x}\right)^{p+1}\phi(x)x^{p+2} \qquad \textbf{(TE)} \quad \text{(G)}$$

que es el resultado de cambiar θx por z en el primer miembro de (E).

Una vez expuestos los nuevos fundamentos teóricos que utilizó Liouville para solucionar el problema de la tautochrone. Es prudente mencionar las condiciones bajo las cuales se desarrolla este problema: sea AMB (figura 15) una curva tal que, si se coloca un corpúsculo pesado en cualquier punto M del arco AMB, el tiempo de descenso de este corpúsculo de M en A tiene un valor constante independiente de la altura línea vertical $MP = h$, donde M es más alto que A. Esta curva es lo que se llama tautochrone en vacío. Adicionalmente, se supone sin alterar la generalidad de este problema que la curva AMB está íntegramente incluida en un plano vertical, encontrando que esta curva es una cicloide, cuya base es horizontal y cuya cumbre está en A.

En relación con lo anterior, el enunciado del problema seis propuesto por Liouville es el siguiente:

Determine la curva AMB para que el tiempo empleado por un cuerpo pesado que desliza sobre esta curva de M a A sea una función dada f (h) de la altura vertical MP= h que separa M de A.

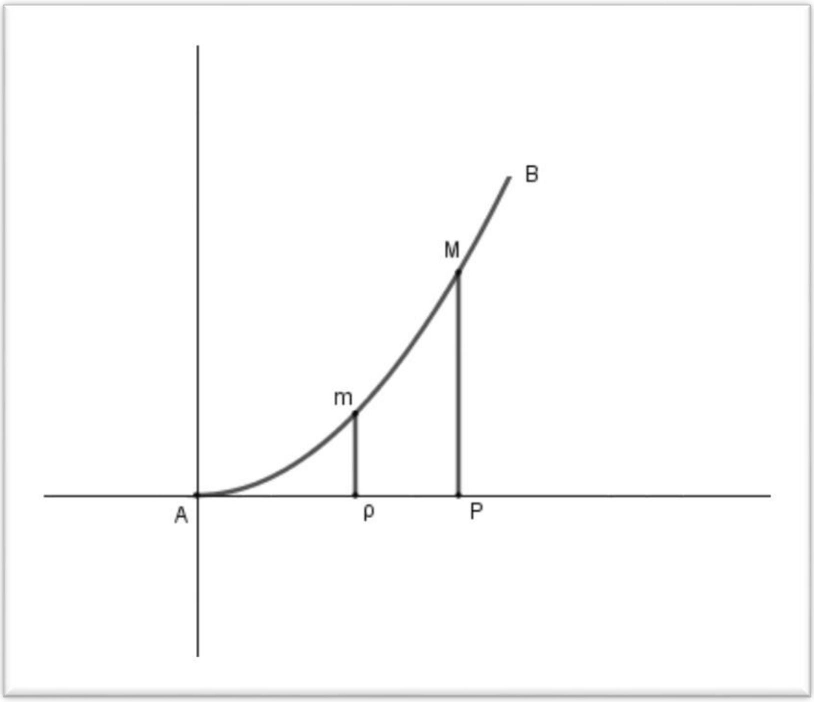


Figura 15: representación gráfica del problema 6.

Para resolver este problema Liouville supone que el corpúsculo se ha colocado sobre la curva, cuya masa es la unidad; en el punto M con una velocidad cero y que al final del tiempo t está en m: denota el arco Am por s, y la ordenada vertical mp por x, esta ordenada expresa la distancia desde el punto m al plano horizontal dirigido por el origen A. Según un principio de la mecánica, la energía cinética $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ del corpúsculo en m debe ser igual a el doble de la cantidad de acción, es decir, igual a $2g(h-x)$, donde g es la intensidad de la gravedad (**CC**). Por lo tanto, se tienen la ecuación

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(h-x),$$

que se puede reescribir como

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g}\sqrt{h-x}}.$$

Es necesario poner el signo antes del valor de dt, porque s está disminuyendo a medida que t aumenta, ds y dt son de signos contrarios.

Ahora bien, al integrar este valor de dt, se obtiene

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int \frac{ds}{\sqrt{h-x}} = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int \frac{dx}{\sqrt{h-x}}\frac{ds}{dx}$$

y al tomar la integral en los limites $x = h$, $x = 0$, es decir desde el punto M hasta el punto A, se tendrá el tiempo T empleado para recorrer el arco AM, dado por

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_h^0 \frac{dx}{\sqrt{h-x}}\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{h-x}}\frac{ds}{dx}.$$

De acuerdo con la afirmación del problema, T debe tener como valor la función dada $f\ (h)$, observando además que el arco s es una función de x, y al denotar esta función, como lo desconocido de la pregunta por $\phi(x)$ se tendrá que $\frac{ds}{dx} = \phi'(x)$ coincide con T o $f\ (h)$, encontrándose que

$$\int_0^h \frac{\phi\prime(x)\, dx}{\sqrt{h-x}} = f\ (h),$$

al hacer $x = \theta h$, y luego se cambia en los h por $\frac{1}{z}$ en los dos lados ecuación anterior, se obtiene que:

$$\int_0^1 \frac{\phi'\left(\frac{\theta}{x}\right) dx}{\sqrt{1-\theta}} = \sqrt{2g}\sqrt{z} f\left(\frac{1}{z}\right). \qquad (3.48)$$

Por otro lado, al usar la ecuación (E) con $p = -\frac{1}{2}$ se concluye que

$$\int_0^1 \frac{\phi'\left(\frac{\theta}{x}\right) dx}{\sqrt{1-\theta}} = \sqrt{-1}\sqrt{\pi} z \int^{\frac{1}{2}} \frac{dz^{\frac{1}{2}}}{z\sqrt{z}} \phi'\left(\frac{1}{z}\right); \qquad (3.49)$$

y al sustituir el valor de (3.48) en (3.49) se elimina la integral llegando a

$$\sqrt{2g}\sqrt{z} f\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt{-1}\sqrt{\pi} z \int^{\frac{1}{2}} \frac{dz^{\frac{1}{2}}}{z\sqrt{z}} \phi'\left(\frac{1}{z}\right).$$

La expresión anterior puede ser reescrita como:

$$\int^{\frac{1}{2}} \frac{dz^{\frac{1}{2}}}{z\sqrt{z}} \phi'\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sqrt{2g}\sqrt{z} f\left(\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi} z},$$

al realizar la derivada de orden un medio a ambos lados de la ecuación anterior, se llega a

$$\phi'\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sqrt{2g} z\sqrt{z}}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}} \frac{d^{\frac{1}{2}}\left[\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{z}}\right]}{dz^{\frac{1}{2}}}. \qquad (3.50)$$

Respecto al segundo miembro de la ecuación anterior Liouville menciona, que está en es una función de z, que siempre es fácil de obtener en forma finita, al menos con la ayuda de cuadraturas definidas, como se ha visto en ejemplos anteriores (demostración Corolario B). Adicionalmente, alude a que supondrá que lo conoce y que lo representará por $F(z)$ llegando a

$$\phi\left(\frac{1}{z}\right) = F(z) \text{ o } \phi'(z) = F\left(\frac{1}{z}\right),$$

igualdad que da

$$\phi(z) = \int F\left(\frac{1}{z}\right)\, dz.$$

Cambiando z por x, y observando que el arco s debe ser cero al mismo tiempo que x es cero, se da que

$$s \text{ o } \phi(x) = \int_0^x F\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

ecuación que determina completamente la naturaleza de la curva *AMB*. Cuando el problema se puede resolver, la función $F\left(\frac{1}{x}\right)$ es real, pero cuando los datos de la pregunta son contradictorios entre sí, el valor de $F\left(\frac{1}{x}\right)$ a veces se vuelve imaginario, para dar un ejemplo simple, Liouville hace ambos supuestos

$$f(h) = \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{\sqrt{h}}, \quad f(h) = \frac{e^{\frac{1}{h}}}{\sqrt{h}};$$

se tendrá respectivamente

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = e^{-z}\sqrt{z}, \quad f\left(\frac{1}{z}\right) = e^{z}\sqrt{z};$$

después

$$\phi'\left(\frac{1}{z}\right) \text{ o } F(z) = \frac{\sqrt{2g}z\sqrt{z}}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\frac{d^{\frac{1}{2}}(e^{-z})}{dz^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2g}z\sqrt{z}e^{-z}}{\sqrt{\pi}},$$

y

$$\phi'\left(\frac{1}{z}\right) \text{ o } F(z) = \frac{\sqrt{2g}z\sqrt{z}}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\frac{d^{\frac{1}{2}}(e^{z})}{dz^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2g}z\sqrt{z}e^{z}}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}.$$

Entonces, en el primer caso el problema puede tener una solución, y en el segundo es absurdo.

Si se pregunta por el tiempo $T = f(h)$, utilizando para recorrer AM, sea proporcional a $\sqrt{h}$ de modo que para dos alturas h, h' los cuadrados de los tiempos T, T' estén entre

$$T^2 : T'^2 :: h : h',$$

donde $f(h)$ será de la forma αh, α la constante de proporcionalidad. Entonces se tendrá

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{z}},$$

y

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}\left[\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{z}}\right]}{dz^{\frac{1}{2}}} = \alpha \frac{d^{\frac{1}{2}}\frac{1}{z}}{dz^{\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha\sqrt{\pi}\sqrt{-1}}{2z\sqrt{z}};$$

así al sustituir el valor anterior en (3.50), da como resultado

$$\phi'\left(\frac{1}{z}\right) \text{ o } F(z) = \frac{\alpha\sqrt{2g}}{2};$$

llegando a

$$\phi(x) \text{ o } s = \frac{\alpha\sqrt{2g}}{2}x,$$

por lo tanto en este caso, la línea buscada es la que pasa por el punto A.

Liouville, aplicó el análisis anterior al problema ordinario de la Tautocrona. En este caso $f(h)$ es una contante T, teniéndose que

$$\phi'\left(\frac{1}{z}\right) \text{ o } F(z) = \frac{\sqrt{2g}z\sqrt{z}}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\ \frac{d^{\frac{1}{2}}\frac{T}{\sqrt{z}}}{dz^{\frac{1}{2}}};$$

como

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}\frac{T}{\sqrt{z}}}{dz^{\frac{1}{2}}} = \frac{T\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}z};$$

concluyéndose que

$$\phi'\left(\frac{1}{z}\right) \text{ o } F(z) = \frac{T\sqrt{2g}\sqrt{z}}{\pi},$$

entonces

$$\phi(x) \text{ o } s = \int_0^x \frac{T\sqrt{2g}}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2T\sqrt{2g}}{\pi}\sqrt{x}.$$

Note que, la ecuación

$$s = \frac{2T\sqrt{2g}}{\pi}\sqrt{x},$$

es la de una cicloide con una base horizontal cuya cumbre está en A; lo cual concuerda con las soluciones conocidas del problema de los tautochrone para la época.

Para finalizar este problema es prudente mencionar algunas consideraciones dadas por Liouville. Entre estas, él hace referencia que se podría considerar el corpúsculo moviéndose en un medio con resistencia, siempre que la resistencia de este medio sea proporcional al cuadrado de la velocidad, ofreciendo nuevas alternativas al problema descrito aquí, que es considerado en el vacío. Además, Liouville hace referencia que el problema que la tautocrone trabajado por él depende esencialmente de la fórmula (E).

3.3.7 Problema 7: construcción de una curva en términos de otras

Il s'agit de trouver une courbe ABM (fig. 11) jouissant de la propriété suivante :

On prend une ordonnée quelconque MP de cette courbe, et on regarde le pied P de cette ordonnée comme le sommet d'une parabole PQR, ayant PO pour axe et 2 OP = 2x pour paramètre : on construit ensuite une troisième courbe PNV, dont l'ordonnée soit pour chaque abscisse le produit des ordonnées des deux premières, en sorte que NS = BS × QS.

Cela posé, on demande que l'aire OPNV, comprise entre cette courbe et les axes des x et des y, soit toujours moitié du carré x^2 construit sur OP.

Figura 16: enunciado del problema 6

Este problema se encuentra dentro del marco de la geometría y como se podrá apreciar más adelante está relacionado con la situación descrita en la sección 3.3.1. El objetivo de esté es mostrar la utilidad de la ecuación (G), presentada en la sección anterior.

El enunciado del problema en cuestión es el siguiente:

Se trata de encontrar la curva AMB (figura 17) con la siguiente propiedad. Se toma cualquier ordenada MP y se observa que P es el vértice de la parábola PQR, con PO para el eje y y $2OP = 2x$ para el parámetro; además se construye una tercera curva PNV, cuya ordenada es para cada abscisa el producto de las ordenadas de las dos primeras, de modo que $NS = BS(QS)$.

Una vez hecho esto, se define que el área de OPNV, entre esta curva y los ejes x y y, sea siempre la mitad del cuadrado x^2 construido en OP.

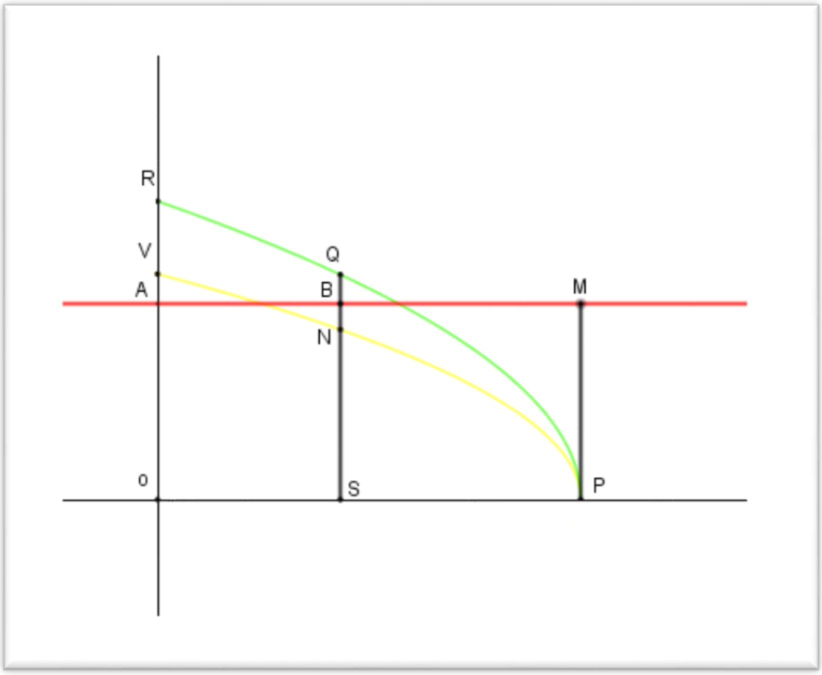


Figura 17: representación gráfica del problema 7

Para solucionar este problema Liouville partió de lo siguiente: sea $MP = \phi(x)$ la ordenada desconocida de la curva; a z como la distancia desde el origen O al punto S, es decir $OS = z$, dado que S esta entre O y P y por hipótesis $OP = x$ se tendrá que la distancia $PS = x - z$; entonces

$$QS = \sqrt{2x(x-z)}$$

por la propiedad de la parábola. Adicionalmente, se tiene que

$$NS = BS(QS) = \phi(z)\sqrt{2x(x-z)}.$$

Por lo tanto, al expresar el área OPNV mediante la integral definida

$$\int_0^x \phi(z)\sqrt{2x(x-z)}\,dz,$$

y dado que está debe ser igual a $\frac{x^2}{2}$ por hipótesis se llega a

$$\int_0^x \phi(z)\sqrt{(x-z)}\,dz = \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{2}}. \tag{3.51}$$

Al hacer $p = \frac{1}{2}$ en la fórmula (G) se obtiene que

$$\int_0^x \phi(z)\sqrt{x-z}\,dz = -\sqrt{-1}\sqrt{x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\int^{\frac{3}{2}} d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \phi(x)x^{\frac{5}{2}}, \tag{3.52}$$

así, al sustituir (3.52) en (3.51) y teniendo en cuenta que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ se llega a

$$-\sqrt{-1}\sqrt{x}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int^{\frac{3}{2}} d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \phi(x)x^{\frac{5}{2}} = \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{2}},$$

lo cual se puede reescribir como

$$\int^{\frac{3}{2}} d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \phi(x)x^{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}.$$

Al cambiar x por $\frac{1}{x}$ en el expresión anterior, se tiene que

$$\int^{\frac{3}{2}} dx^{\frac{3}{2}} \phi\left(\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{x},$$

la cual, al derivarse con índice $3/2$ a ambos lados se llega a

$$\phi\left(\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\,\frac{d^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x}}{dx^{\frac{3}{2}}},$$

que al aplicar la ecuación (3.1), da como resultado

$$\phi\left(\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\,\frac{-3\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{4x^{\frac{5}{2}}},$$

$$\phi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{8}, \text{ o } \phi(x) = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

Por lo tanto, la línea buscada AMB es paralela al eje x y ubicada a una distancia d de este eje igual a $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Respecto a este problema, Liouville aludió a que es similar al problema descrito en la sección 3.3.1 pero difiere de él, en más de un aspecto. Especialmente en el hecho de que el área que se está considerando en este nuevo problema no es ilimitada, como en el citado anteriormente.

CAPÍTULO 4

Conclusiones

Introducción

En este capítulo se presentan las conclusiones desde tres ámbitos. Primero, lo relativo a la pregunta de investigación, discutiendo sobre los aportes de Liouville al cálculo fraccionario, contrastándolos con los aportes de otros matemáticos anteriores a él. Segundo, lo relativo a la epistemología del cálculo fraccionario, reflexionando sobre algunos elementos expuestos en la obra de Liouville, que influyeron directamente en la evolución y validación de este cálculo. Tercero, lo relativo a los problemas descritos en este trabajo y su posible inclusión en el aula de clases por profesores de cálculo fraccionario, o en el diseño de propuestas de enseñanza con teorías de Matemática Educativa. Finalmente, el capítulo termina con las implicaciones de esta investigación.

4.1 Reflexiones en torno a los aportes de Liouville al cálculo fraccionario

Relativo a los aportes teóricos de Liouville (1832a) se ha decidido presentar estas ideas en dos secciones. En la primera se discutirá los aportes teóricos y en la segunda los aportes prácticos.

4.1.1 Aportes de Liouville desde lo teórico

Un aspecto fundamental inmerso en el trabajo de Liouville (1832a) en relación con el avance histórico del cálculo fraccionario, es la definición que él brinda de derivada fraccionaria. Particularmente, matemáticos como Lacroix, Euler y Fourier ya habían dado definiciones de derivada fraccionaria; sin embargo las definiciones dadas por los dos primeros eran solo para funciones polinómicas, y el tercero para toda función solo si está podía expresarse en dos integrales indefinidas. Mientras que Liouville brindó una definición de derivada fraccionaria para todo tipo de función, si está se expresa como una suma de exponenciales. Ampliando las definiciones de Lacroix y Euler, y brindando un camino alternativo a la definición dada por Fourier.

Es de resaltar que el resultado de Liouville (1832a) no solo implicó un avance en la definición de derivada fraccionaria para cualquier tipo de función, sino también para la integral fraccionaria. Dado que, él plantea claramente que la definición (1) descrita en la sección 3.1 corresponde a la de integral fraccionaria cuando $\mu < 0$, brindando un resultado alterno. Además, de que esta definición fue utilizada para demostrar la derivada fraccionaria de la función $f(x) = x^{-n}$ lo cual permite validar resultados anteriores a Liouville, particularmente se valida la definición dada 13 años antes por Lacroix para funciones polinómicas.

Otro de los aportes de Liouville, es el Corolario B descrito en la sección 3.2, en el cual se expresa la derivada fraccionaria de una función en términos de una integral indefinida, o mejor aún de una integral fraccionaria. Este aporte es considerado valioso, dado que, hasta ese momento, ningún matemático en las definiciones dadas había expresado está relación. Asimismo, mencionamos que el argumento presentado por Liouville en ese corolario permitió un avance significativo en torno a las definiciones posteriores de derivadas e integrales fraccionarias, puesto que muchas de ellas reflejan la relación entre la definición de derivada fraccionaria e integral indefinida, lo cual puede verse reflejado por ejemplo en las definiciones de Caputo y Marchaud (ver anexos).

En total Liouville presentó un teorema y seis corolarios relacionados con la derivada e integral fraccionaria, los cuales fueron descritos a lo largo de la sección 3.2 y parte de la 3.3. Estos fueron introducidos con el objetivo de contribuir tanto a la fundamentación teoría de este cálculo como a la solución de los problemas propuestos, permitiendo comprender la relación entre lo teórico y lo práctico.

La relación entre el avance teórico y práctico puede verse reflejada particularmente en los problemas uno y siete, ambos pertenecientes a la geometría. Puesto que, estos problemas son de características similares, como se puede apreciar en su descripción, básicamente su diferencia radica en una de las dos condiciones dadas para su solución. Sin embargo, los elementos teóricos utilizados por Liouville para solucionar estos problemas, evidencian dos alternativas diferentes. Las cuales, constituyen un aporte significativo al cálculo fraccionario, dado que, hasta el momento no había aplicaciones ni aportes amplios a su teoría y práctica, por lo tanto, en la solución de los problemas uno y siete Liouville logró reunir muy bien ambos aspectos.

4.1.2 Aportes de Liouville desde lo práctico

Hasta ahora, hemos discutido los aportes teóricos de Liouville al cálculo fraccionario, pero es momento revisar los de corte aplicativo. En este sentido, se hace necesario precisar que en el trabajo de Liouville se da la primera aplicación del cálculo fraccionario, hipótesis que se ha validado en este documento. Además, se puede apreciar que Liouville demostró su aplicación en tres áreas diferentes: la geometría con los problemas uno, siete, ocho y nueve; el electromagnetismo mediante los problemas dos y tres; y la física mecánica con los problemas cuatro, cinco y seis. Aunque, más allá de pensar si hay una aplicación de este cálculo, un aspecto que quedó demostrado en el la memoria de Liouville es la necesidad de estudiar y profundizar en este cálculo, por su aplicabilidad en campos de geometría, electromagnetismo y física mecánica.

En general, la necesidad planteada por Liouville por seguir investigando y aprendiendo sobre el cálculo fraccionario puede verse reflejada principalmente en los problemas dos y tres. En los cuales, se puede apreciar que solucionó dos problemas estudiados y resueltos de forma experimental, sin embargo los argumentos expuestos por

Liouville son más amplios, partiendo de que él no restringe las características de la función que desea encontrar, dando así una solución más completa en comparación cuando no se usaron los constructos teóricos de este cálculo.

Otro aspecto importante evidenciado en las aplicaciones dadas por Liouville, son las falencias teóricas que sus definiciones de derivada e integral fraccionaria. Particularmente, queremos hacer referencia a la solución del problema tres en la cual cómo se puede apreciar en la sección 3.3.3, él se topa en la solución de este problema con una ecuación diferencial de orden lineal, la cual al resolverla obtiene una constante de integración la cual le causa dificultades. Lo anterior, consideramos que obedece principalmente a que las definiciones dadas por Liouville son más difíciles de implementar, cuando se trata de solucionar problemas que implican condiciones iniciales.

Referente, a la situación apreciada en el problema tres respecto a las condiciones iniciales podemos decir, que en el desarrollo histórico del cálculo fraccionario se ve reflejado. Esencialmente, en la inclusión de las definiciones de derivada e integral fraccionaria de Caputo, en las cuales se incluyeron definiciones, en las cuales se toma en consideración las condiciones iniciales de un problema. Es decir, de una u otra forma el problema tres mostró la necesidad de avanzar en los constructos teóricos del cálculo fraccionario, desde el punto de vista práctico.

Un aspecto que se puede apreciar en los nueve problemas presentados por Liouville y de los cuales fueron descritos siete en este trabajo, es su objetivo. En general, los problemas planteados tenían como objetivo encontrar una función desconocida, aspecto que puede verse relacionado con la teoría de ecuaciones diferenciales, que para este caso serían de orden fraccionario. Sin embargo, en los objetivos generales de la obra de Liouville nunca hizo referencia a la teoría de ecuaciones diferenciales fraccionarias de manera explícita. Por lo tanto, podemos concluir que es difícil apartar la derivada fraccionaria, de la integral fraccionaria y de las ecuaciones fraccionarias, mostrando los conceptos asociados al cálculo fraccionario más dependientes el uno del otro en relación con el cálculo convencional.

La conclusión anterior puede verse mejor sustentada a través del siguiente razonamiento. Históricamente cuando nos referimos al concepto de derivada convencional le podemos encontrar una aplicación por sí sola, como por ejemplo encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva; cuando hablamos de integral convencional podemos pensarla como el área bajo la curva; y ecuaciones diferenciales como el proceso para encontrar una función desconocida. Mientras en el cálculo fraccionario y particularmente las aplicaciones de la derivada, la integral y las ecuaciones diferenciales no aparecen separadas sino unificadas, como puede apreciarse en la obra de Liouville (1832a).

En síntesis, podemos decir que el aporte de Liouville tanto teórico como práctico al cálculo fraccionario es amplio y representativo, lo que nos permite apoyar la importancia de su trabajo, como uno de los más representativos y fundamental en el desarrollo de este cálculo.

4.2 Reflexiones en torno a la epistemología del cálculo fraccionario.

Partiendo de la epistemología como la ciencia que estudia el conocimiento, en particular cómo surge, cómo evoluciona y como se valida. En esta sección discutiremos, algunos aspectos epistemológicos del cálculo fraccionario basados en la revisión de la obra de Liouville y de algunos aspectos conocidos en las fuentes secundarias.

De inicio el aspecto que dio origen a este nuevo cálculo, fue la carta escrita de l'Hôpital a Leibniz, se identificó que este cálculo nace por el deseo de generalizar la derivada convencional más no de resolver un problema relativo a las necesidades sociales. Lo anterior, es un aspecto que puede reflejar las dificultades que han tenido los matemáticos para darle una interpretación física o geométrica a este cálculo, es decir desde su génesis el deseo de los matemáticos fue generalizar.

Aunque, vale la pena aclarar que a pesar de la dificultad para interpretar este cálculo, la situación en torno a su utilidad y aplicabilidad ha cambiado mucho en relación con su origen, como se puede apreciar en muchos trabajos. Por ejemplo en Sauchelli y Laboret (2007), Vásquez y Velazco (2011), Lombardero (2014) y Tejado et al. (2015) se puede apreciar el cálculo fraccionario como un fundamento teórico útil y necesario en el campo de la modelación matemática, particularmente porque modela las situaciones con aproximaciones mucho más cercanas a la realidad en relación con los modelos convencionales.

En relación con lo anterior, se destaca la importancia de trabajo de Liouville, puesto que este trabajo se convierte en un punto de inflexión entre las dos posturas mencionadas, ya que en esta obra se muestra la utilidad práctica de este cálculo. Además, de que influye directamente en la epistemología del cálculo fraccionario, puesto que representa un cambio entre su origen netamente teórico y lo que se vive actualmente donde la aplicación es uno de los puntos más fuertes.

Por otra parte, se precisa que una idea asociada al cálculo fraccionario, es que es una generalización del cálculo convencional, idea que es muy discutible, puesto que, en la derivada fraccionaria no se cumple la regla de la cadena, que en la derivada convencional sí. Por lo tanto, lo ideal sería comprender el cálculo fraccionario como una extensión del convencional, no como una generalización. Sin embargo, al revisar sus orígenes y como se desarrolló particularmente de 1819 a 1832 se evidencia que matemáticos como Euler, Lacroix y Liouville, partieron de generalizar la derivada convencional para obtener definiciones de derivada fraccionaria, es decir que el cálculo fraccionario surge como una generalización del convencional, por lo tanto es compresible que se asocie con una generalización así no lo sea.

4.3 Reflexiones en relación con el conocimiento del profesor

Uno de los aspectos que motivan la realización de investigaciones de corte histórico epistemológico es impactar en el conocimiento del profesor. En este caso, queremos hacer mención a dos tipos de profesores: los encargados de enseñar e investigar cálculo fraccionario; y los encargados de enseñar cálculo convencional.

Partamos discutiendo algunas recomendaciones que se le puede hacer al profesor que enseña cálculo fraccionario a partir del análisis de los datos. Lo primero, es que los problemas descritos en este trabajo podrían ser incluidos en sus prácticas de enseñanza, siendo estos un aspecto motivador para aprender este cálculo, dado que, en ellos se evidencian las primeras aplicaciones empleando este cálculo, aspecto que genera motivación en los estudiantes. Además, que la inclusión de estos problemas se debe tomar en cuenta los diferentes contextos en los cuales estos están inmersos.

Profundizando en lo anterior, nos interesa realizar un par de sugerencias en torno a la posible inclusión de estos problemas en el aula de clases. La primera va relacionada con los tipos de problemas encontrados. Por ejemplo, los problemas dos y tres sería pertinente incluirlos juntos en una propuesta de enseñanza, dado que ambos problemas están inmersos en el electromagnetismo y además el tercero puede ser considerado una generalización del segundo, aspecto que permite un acercamiento adecuado a la aplicación de este cálculo y al aprendizaje del mismo. La otra sugerencia, tiene que ver con los problemas uno y siete ambos pertenecientes a la geometría, que en esencia son muy similares pero su proceso de solución son diferentes, incluso los constructos teóricos empleados para su solución son diferentes, elementos como estos son llamativos para los estudiantes, además de que permiten conocer cómo solucionar problemas similares con metodologías diferentes.

Por otro lado, el impacto de esta investigación en profesores encargados de impartir el cálculo convencional, se encuentra particularmente en que se brinda la posibilidad desde un punto histórico, conocer acerca de la extensión de dos conceptos fundamentales en su práctica de enseñanza. En otras palabras, este trabajo brinda la posibilidad de que profesores de nivel medio superior reflexionen sobre conceptos matemáticos que para ellos son desconocidos. Contribuyendo, al conocimiento de la materia impartida.

4.4 Discusión de resultados con otras investigaciones

Como se ha mencionado a lo largo de este trabajo, nuestro punto de partida fue la revisión de fuentes secundarias, las cuales nos permitieron fijar hipótesis en torno a la importancia del aporte de Liouville, y de algunos de los constructos teóricos que él presento. En relación, con estas hipótesis nos interesa discutir algunos aspectos.

El primero, es referente a la importancia del trabajo de Liouville, puesto que el estudio de su obra nos permitió conocer las primeras aplicaciones del cálculo faccionario en tres disciplinas, geometría, electromagnetismo y física mecánica. Además, de conocer los distintos procesos para su solución. Asimismo, la reflexión epistemológica nos permitió dialogar acerca su impacto en la evolución del cálculo fraccionario, ubicando y reconociendo el aporte de Liouville como significativo al cálculo fraccionario.

El segundo aspecto que nos interesa discutir, es que diferimos en algunas de las apreciaciones que brindan algunas fuentes secundarias acerca de los aportes teóricos de Liouville. Particularmente, investigaciones como las de Ross (1997), Debnath (2004), Sánchez (2011), Lombardero (2014) mencionan que Liouville (1832) presenta dos definiciones de derivada fraccionaria lo cual no se puede apreciar en la obra. Lo que sí se puede apreciar (sección 3.1) es que Liouville da una definición de derivada fraccionaria y a partir de esta definición Liouville da dos ejemplos de derivada fraccionaria para las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x) = \frac{1}{x^n}$, más no una segunda definición como aluden en las investigaciones citadas.

Otra apreciación dada por fuentes secundarias acerca del aporte de Liouville de la cual diferimos, es la apreciación de Sánchez (2011) y Lombardero (2014) quienes mencionan que Liouville (1832a) dio una definición de derivada fraccionaria, solo para funciones exponenciales omitiendo un aspecto importante. Básicamente, omitieron que en la definición de derivada fraccionaria dada por él parte de que toda función puede expresarse como la suma de funciones exponenciales, elemento importante que hace parte de la definición de Liouville de derivada fraccionaria como puede apreciarse en la sección 3.3.1.

Por otra parte, al inicio de éste documento se mencionaron las potencialidades y aportes de la historia y epistemología de la matemática a la comunidad de Matemática Educativa. Aspectos, los cuales se pueden apreciar en el desarrollo de esta investigación. Puesto que, este trabajo permite conocer acerca de los sucesos que dieron origen al cálculo fraccionario, particularmente en los tipos de problemas que se resolvían. Contribuyendo, a develar situaciones problemas las cuales pueden ser llevadas al aula de clases, esto con el fin de motivar a los estudiantes. Asimismo, esta investigación se considera un punto de partida para futuras investigaciones en Matemática Educativa en las cuales se incluyan aspectos aquí descritos.

4.5 Implicaciones de esta investigación

A lo largo de este trabajo se realiza un acercamiento a la epistemología del cálculo fraccionario, a través de su historia, particularmente desde la obra de Liouville. Sin embargo, que una de las cuestiones que quedan abiertas para futuras investigaciones es un análisis epistemológico más amplio en donde se estudien todos los aspectos y obras en las cuales se describen la evolución de este cálculo.

Uno de los aspectos que muestra el análisis de este trabajo, son las potencialidades de este cálculo en la resolución de problemas de forma alternativa al cálculo convencional. Además, de que en algunas ocasiones se aludió a su potencial para modelar fenómenos físicos, biológicos, entre otros. Por lo tanto, una sugerencia es que desde la Matemática Educativa se realicen propuestas de enseñanza aprendizaje de los conceptos asociados al cálculo fraccionario, particularmente se sugiere que se realicen propuestas para estudiantes de nivel superior.

Dado que, se considera que la inclusión del cálculo fraccionario en el nivel medio superior es necesario, en virtud de lo expuesto en algunos de los antecedentes en los cuales se puede apreciar la utilidad de este cálculo. Así como en los problemas descritos, se puede apreciar las ventajas de emplear éste cálculo en la solución de problemas en diversas disciplinas. Lo anterior, sumado a que en la mayoría de cursos de cálculo impartidos en este nivel se omite que los órdenes de las derivadas e integrales puedan ser de orden no entero. Situación que constituye un limitante en su formación, dado que no se da la posibilidad a los estudiantes conozcan de las herramientas conceptuales que brinda el cálculo fraccionario en la solución de problemas.

Aspectos como los anteriores se pueden ver apreciados por ejemplo en la Universidad Autónoma de Guerrero. Puesto que, en el nivel superior se desconoce de la existencia del cálculo convencional, sin embargo en nivel maestría los estudiantes cuentan con una línea de investigación que se fundamenta en esté cálculo. En síntesis, se propone que en futuras investigaciones se estudie la inclusión del cálculo fraccionario en el currículo de matemáticas en nivel licenciatura.

Adicionalmente, se sugiere que en el diseño de propuestas de enseñanza-aprendizaje se involucren elementos epistemológicos, como los descritos en esta investigación. Asimismo, se sugiere que estas propuestas se involucren los problemas aquí descritos y mejor aún que se consideren aspectos mencionados en la sección 4.3 en la cual se reflexionó sobre la posible articulación de los problemas, aspecto el cual podría ser validado en futuras investigaciones.

Anexos

Introducción

En esta sección se presentarán brevemente algunas posturas teóricas del cálculo fraccionario basado en el libro *Cálculo Fraccionario y Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias* escrito por Bonilla, Kilbas y Trujillo (2003). Particularmente, se presentaran algunas de las definiciones con interpretación actual de la derivada e integral fraccionaria. Esto con el objetivo de conocer un poco más acerca de cómo se ha validado este cálculo y de las definiciones con las cuales se están trabajando actualmente; y de fortalecer las reflexiones dadas en el cuarto capítulo. Así, en esta sección se presentarán las definiciones de Reimann-Liouville, Marchaud, Hadamard, Caputo, y Grünwald-Letnikov.

5.1 Definiciones de derivada e integrales fraccionarias.

A lo largo de esta sección se darán a conocer distintas definiciones de derivada e integral fraccionaria, las cuales se generalizan del cálculo convencional. Para ello se deben de tener en cuenta las siguientes condiciones:

Sea $\alpha \epsilon \mathbb{C}$ $(Re(\alpha) > 0), n = -[-Re(\alpha)], [a, b] \subset R$ y $f \in L_1(a, b)$

5.1.1 Integral y derivada fraccionaria de Reimann-Liouville sobre un intervalo finito $[a, b]$.

La definición de integral (I) fraccionaria de Riemann-Liouville (R-L) de orden α por izquierda y derecha son respectivamente:

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (x > a) \text{ y}$$

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (x < b).$$

Las definiciones de derivada fraccionaria R-L están estrictamente ligadas a las definiciones de integrales fraccionarias. Así, las expresiones

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = [D^n I_{a+}^{n-\alpha}](x), \text{ y}$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = [(-D)^n I_{b-}^{n-\alpha}](x),$$

Representan las derivadas de R-L de orden α por izquierda y por derecha respectivamente (Bonilla, Kilbas y Trujillo, 2003).

5.1.2 Derivada fraccionaria de Marchaud.

Al extender de manera natural las definiciones de Riemann-Liouville a los intervalos infinitos $[a, \infty]$ y $[\infty, b]$; y al operar sobre estas definiciones, estás según Bonilla, Kilbas y Trujillo (2003) pueden ser descritas de una mejor manera, cuando la función f sea lo suficientemente buena. Así la definición de derivada fraccionaria de Marchaud para intervalos infinitos es la siguiente:

$$\left(D_{\pm}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(x+t)}{t^{1+\alpha}} dt,$$

lo que es equivalente a

$$\left(D_{\pm}^{\alpha}f\right)(x)=\left[D^{n}\left(D_{\pm}^{\{\alpha\}}f\right)\right](x)=\left[D_{\pm}^{\{\alpha\}}(D^{n}f)\right](x)$$

donde $0<\alpha<n$ y $\{\alpha\}=n-\alpha$.

5.1.3 Derivadas e integrales fraccionarias de Hadamard

En palabras de Bonilla, Kilbas y Trujillo (2003) se parte de la construcción del operador fraccionario $(xD)^{\alpha}$ como el inverso del siguiente operador integral fraccionario, dado por

$$(F_{+}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{\left(Ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t}\ (x>0,\alpha>0).$$

De la cual obtuvieron los siguientes operadores integrales fraccionarios

$$(F_{a+}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f(t)}{\left(Ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t}\qquad(x>a\ \geq 0,\alpha>0),\text{ y}$$

$$(F_{b-}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}\frac{f(t)}{\left(Ln\frac{t}{x}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t}\qquad(x<x\ <b\geq 0,\ \ \alpha>0).$$

De los cuales se desprenden los siguientes operadores diferenciales de Hadamard

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x)=(xD)^{[\alpha]+1}\left(F_{a+}^{1-\{\alpha\}}f\right)(x),\text{ y}$$

$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x)=(-xD)^{[\alpha]+1}\left(F_{b-}^{1-\{\alpha\}}f\right)(x)$$

5.1.4 Derivada fraccionaria de Caputo.

Según Bonilla, Kilbas y Trujillo (2003), Caputo presenta una definición de derivada fraccionaria de orden α en relación con la Teoría de Viscoelasticidad Lineal

$$\left(D_{a+}^{\mu}f\right)(x)=\left(I_{a+}^{n-\mu}D^{n}f\right)(x),\qquad(x>a)\text{ y }n=-[-\mu],$$

con $I_{a+}^{n-\mu}$ es la integral de Reimann-Liouville.

5.1.5 Derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov sobre intervalos infinitos.

Se parte de la expresión

$$(D^{r}f)(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(\Delta_{h}^{r}f)(x)}{h^{r}}\qquad\qquad r\in N,$$

donde $\Delta_{h}f(x)$ está definido como

$$(\Delta_h^r f)(x) = [(E - \mathcal{T}_{-h})^r f](x) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \binom{r}{j} f(x - jh),$$

aclarando que $(\mathcal{T}_{-h})(x) = f(x - h)$, y E es el operador identidad.

Ahora bien, sea f una función definida sobre $\mathbb{R}$, con $\alpha > 0$ y $h > 0$ se define la derivada de Grünwald-Letnikov como

$$f_{\pm}^{\alpha}(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{(\Delta_{\pm h}^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}},$$

con

$$(\Delta_h^{\alpha} f)(x) = [(E - \mathcal{T}_{-h})^{\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh).$$

Referencias bibliográficas

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*, *8*(1), 30-46.

Arboleda, L. (1984). Historia y enseñanza de las matemáticas. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 1*(2), 167-194.

Arboleda, L. & Castrillón, G. (2012). La historia y la educación matemática en el "horizonte" conceptual de la pedagogía. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 14*(1), 13-32.

Arcavi, A. (1991). The Experience of History in Mathematics Education: Two Benefits of Using History. *For the Learning of Mathematics*, *11*(2), 11.

Arcavi, A. & Isoda, M. (2007). Learning to listen: From historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 111-129.

Aróstegui, J. (2001). *La investigación histórica teoría y método.* Barcelona, España: Critica.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del Cálculo*. México: Internacional Thomson Editores.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación Educativa.* Madrid: La Muralla.

D'Amore, B. (2007). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Cuadernos del Seminario en educación*, 8, 36-58.

Debnath, L. (2004). A brief historical introduction to fractional calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(4), 487-501.

Debnath, L. (2015). A brief history of the most remarkable numbers e, i and γ in mathematical sciences with applications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(6), 853-878.

Del Río, J. (1997). Historia de la Matemática: implicaciones didácticas. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, (26), 33-38.

Fox, D. (1981) *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Universidad de Navarra.

González, M. (2011). Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hôpital. *Epsilon - Revista de Educación Matemática*, *28*(77), 83-97.

González, M. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Salamanca, España: Universidad de Salamanca.

González, M. (2009). La investigación en historia de la educación matemática. *Revista Educación y Ciencia, 1*(36), 37-58.

González, M. y Sierra, M. (2003). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En E. Castro (Coord.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 109-130). Granada, España: Universidad de Granada.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas,* (45), 17-28.

Grossman, P. L. (1990). *The Making of a Teacher. Teacher Knowledge and Teacher Education*. New York: Teachers College, Columbia University.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas.* Cali: Universidad del Valle.

Guía-Calderón, M., Rosales-García, J., Guzmán-Cabrera, R., González-Parada, A., & Álvarez-Jaime, J. (2015). El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. *Acta Universitaria*, *25*(2), 20-27.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Jankvist, U. T., Mosvold, R., Fauskanger, J., & Jakobsen, A. (2015). Analysing the use of history of mathematics through MKT. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(4), 495-507.

Kjeldsen, T. H., & Lützen, J. (2015). Interactions Between Mathematics and Physics: The History of the Concept of Function—Teaching with and About Nature of Mathematics. *Science & Education*, *24*(5-6), 543-559.

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Text Analysis: A Guide to Methods, Practice and Using Software*. London: Sage publications.

Liouville, J. (1832). Mémoire Sur quelques Questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions. Journal de l’École Polytechnique, 21(13), 1-69.

Liouville, J. (1832). Sur le Calcul des Différentielles à Indices quelconques. *Journal de l’Ecole Polytechnique*, *21*(13), 71-162

Liouville, J. (1832). Mémoire sur questions de Geométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quesions. *Journal de l’Ecole Polytechnique*, *21*(13), 1-69.

Lombardero, A. (2014). Cálculo Fraccionario y Dinámica Newtoniana. *Pensamiento Matemático*, *4*(1), 77-106.

Lupiáñez, J. L. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, *40*, 59-63.

Maz, M. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Granada, España: Universidad de Granada.

Mora, L., Guacaneme, E., & Jiménez (2016). Un ejemplo de integración de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento didáctico de profesores de Matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (47), 192-206.

Nolla, R. (2006). *Estudis i activitats sobre problemes clau de la història de la matemàtica*. Barcelona: l'Institut d'Estudis Catalans.

Oldham, K., & Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus*. New York: Mathematics in Science and Engineering.

Picado, M. (2012). *El sistema métrico decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892).* Granada, España: Universidad de Granada.

Rodríguez, F. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico*. Salamanca, España: Universidad de Salamanca

Ross, B. (1977). The development of fractional calculus 1695-1900. *Historia Matemática, 4,* 75-89.

Ruiz, J. (1976). El método histórico en la investigación histórico-educativa. En N. de Gabriel y A. Viñao (Eds.), *La investigación histórico-educativa: tendencias actuales* (pp. 131-202). Barcelona, España: Ronsel.

Sánchez, J. (2011). Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional. *Pensamiento Matemático*, *1*(2), 1-15.

Sauchelli, V., & Laboret, S. (2007). Cálculo Fraccional Aplicado a Control Automático. *Mecánica Computacional*, *26*, 3308-3327.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching. Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Shulman, L. S. (2001). Conocimiento y enseñanza. *Estudios Públicos*, 83, 163-196.

Sierra, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. *Números,* (43-44), 93-96.

Struik, D. J. (1998). *Historia concisa de las matemáticas*. Ciudad de México, México: Instituto Politécnico Nacional.

Tejado, I., Vinagre, B., Torres, D., Lopez-Bermal, A., Villalobos, F., Testi, L., & Podlubny, I. (2015). Fractional Approach for Estimating sap Velocity in Trees. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, *18*(2), 479-494.

Torres, A., & Brambila, F. (Octubre del 2016). Cálculo Fraccional. En B. Tapia (presidencia). *XLIX Congreso Nacional Sociedad Matemática Mexicana*. Congreso llevado a cabo en Aguascalientes, México.

Torres, L., Guacaneme, E., & Arboleda, L. (2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, *16*(2), 203-224.

Vasco, C. (2002). Siete tensiones irresolubles en la articulación de la historia de las matemáticas con la enseñanza de las matemáticas. In *Conferencia inaugural de la Primera Escuela Latinoamericana de Historia y Epistemología de las Matemáticas, ELHEM1. Universidad del Valle, Santiago de Cali*.

Vásquez, L., & Velasco, M. (2011). El cálculo fraccionario como instrumento de modelización. *Prepublicaciones del departamento de matemática aplicada*, *3*(4), 1-15.