



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA



DESARROLLO DE LA MIRADA PROFESIONAL EN FUTUROS PROFESORES DE
MATEMÁTICAS DESDE EL CONOCIMIENTO SOBRE EL MODELO DEL
RAZONAMIENTO CONFIGURAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA:
MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

ANDREA GUADALUPE GUTIÉRREZ OJEDA

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. MARÍA GUADALUPE CABAÑAS SÁNCHEZ

CODIRECTORA DE TESIS:

DRA. MARÍA DEL MAR MORENO MORENO

Desarrollo de la mirada profesional en Futuros Profesores de Matemáticas desde el conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural

Tesis de Maestría

Andrea Guadalupe Gutiérrez Ojeda

Directora de tesis:

Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez

Codirectora de tesis:

Dra. María del Mar Moreno Moreno

Comité evaluador:

Dr. Armando Morales Carballo

Dra. María del Socorro García González

2020

Centro de Investigación en Matemática Educativa

Facultad de Matemáticas

Universidad Autónoma de Guerrero

Chilpancingo, Guerrero, México

Esta investigación fue financiada
por el Consejo Nacional de Ciencia
y Tecnología



Becario Conacyt
926858

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mis padres Hernán y Leticia, a mis hermanas Cristina y Jessica y a mis sobrinas Jessica y Yaretzi, quienes me apoyaron incondicionalmente.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis asesoras, la Dra. Guadalupe Cabañas y la Dra. Mar Moreno, por su apoyo y orientación para la realización de esta investigación. Gracias a ambas por creer en mí y en el trabajo de tesis.

A mis profesores y compañeros de la Universidad Autónoma de Guerrero, quienes durante estos dos años contribuyeron en mi formación académica y profesional. Les agradezco por acompañarme y por compartir espacios de discusión académica, momentos de diversión, compañerismo y demás aventuras que quedan guardados en mi memoria.

A mi familia, este logro es por y para ustedes. Gracias por su apoyo incondicional y por su motivación para superarme constantemente en cada aspecto de mi vida. Ustedes son mi principal fuente de inspiración.

A mis amigos de Mérida, Yucatán, por estar conmigo aún a distancia. Gracias por escucharme cuando más lo necesite, por ayudarme a seguir y recordarme que confíe en mí. Soy afortunada por tenerlos en mi vida.

Por último, a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero por su disposición para participar en este trabajo de investigación, así como a los revisores del trabajo por sus comentarios y sugerencias de mejora.

No fue sencillo, pero gracias a Dios por brindarme las herramientas y por permitirme estar acompañada de las personas antes mencionadas, ha sido más placentero el camino.

Tabla de contenido

Capítulo 1 Justificación y problema de investigación.....	3
1.1 Mirada profesional en el desarrollo profesional y formación docente.....	3
1.2 La prueba en Geometría	4
1.3 Mirada profesional en el contexto de la prueba en geometría.....	6
1.4 Pregunta y objetivo de investigación.....	7
Capítulo 2 Fundamentación teórica	8
2.1 Competencia Mirada Profesional	8
2.2 Modelo del Razonamiento Configural	9
2.2.1 Perspectiva cognitiva del aprendizaje en geometría	10
2.2.2 Procesos cognitivos de visualización.....	11
2.2.3 Procesos cognitivos de razonamiento	12
2.2.4 El razonamiento como un proceso configural.....	13
2.3 Mirada Profesional y Modelo del Razonamiento Configural	20
Capítulo 3 Aspectos metodológicos	22
3.1 Diseño de la investigación: Estudio de caso	22
3.1.1 Unidades del estudio de caso	22
3.2 Módulo de Enseñanza: Interpretación de procesos de prueba en geometría.....	24
3.2.1 Momentos del Módulo de Enseñanza	25
3.3 Implementación del ME.....	30
3.3.1 Organización de las sesiones	30
3.3.2 Planificación de las sesiones	31
3.3.3 Organización de la actividad en el salón de clases	37
3.4 Método de análisis de datos	38
Capítulo 4. Resultados	42
4.1 Conocimiento sobre el Modelo el Razonamiento Configural en FPM.....	42
4.1.1. Problema de probar 1	43
4.1.2. Problema de probar 2.....	51
4.1.3. Problema de probar 3.....	62
4.1.4. Problema de probar 4.....	73
4.2 Toma de decisiones de FPM sobre la comprensión de estudiantes	89
4.2.1. Tarea profesional	89

Capítulo 5. Conclusiones y reflexiones	108
5.1 Mirada profesional en PFM a partir de su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configuracional.....	108
5.1.2 Caso 1. Modelo de orden al resolver problemas de probar	108
5.1.3 Caso 2. Modelo que estructura el razonamiento al resolver un problema de probar	109
5.2 Reflexiones finales	110
Referencias bibliográficas.....	113
Anexos	118
Anexo 1. Instrumento de evaluación.....	118
Anexo 2. Documento teórico.....	120
Anexo 3. Problema de probar 1 y 2.....	125
Anexo 4. Problema de probar 3 y 4.....	127
Anexo 5. Tareas profesionales	129

Lista de Figuras

Figura 1. Reconocimiento de triángulos y rectángulos.....	11
Figura 2. Asociación de una configuración geométrica con el concepto de triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras	11
Figura 3. Figura inicial, configuración agregada y reconfiguración tomada de Nelsen (1993, citada en Torregrosa y Quesada, 2007).....	12
Figura 4. Coordinación de la aprehensión discursiva y operativa en la resolución de problemas de probar.....	14
Figura 5. Descripción del Modelo del Razonamiento Configural.	18
Figura 6. Interpretación de FPM1 sobre su resolución al problema de probar 1.	46
Figura 7. Modificaciones a la configuración geométrica por FPM2.	49
Figura 8. Interpretación de FPM2 sobre su resolución al problema de probar 1.	50
Figura 9. Interpretación de FPM1 a su proceso de solución del problema de probar 2.....	57
Figura 10. Interpretación de FPM2 a su proceso de solución del problema de probar 2....	60
Figura 11. Interpretación de FPM1 a su proceso de solución del problema de probar 3....	69
Figura 12. Interpretación de FPM2 a su proceso de solución del problema de probar 3....	72
Figura 13. Parte de la interpretación realizada por FPM1 a su proceso de solución.	81
Figura 14. Parte de la interpretación realizada por FPM2 sobre su proceso de solución. ..	88
Figura 15. Explicación del razonamiento construido por el estudiante de FPM1.	90
Figura 16. Decisión de FPM1 ante el razonamiento evidenciado por el estudiante.....	91
Figura 17. Representación de FPM1 de dos circunferencias con el mismo radio.	92
Figura 18. Interpretación de FPM1 al razonamiento del primer estudiante.....	93
Figura 19. Interpretación de FPM1 al razonamiento del estudiante 2.....	94
Figura 20. Mirada profesional de FPM1.	98

Figura 21. Modificaciones de FPM2 a la representación geométrica del enunciado para explicar el razonamiento del estudiante.	99
Figura 22. Modificaciones de FPM2 a la representación geométrica inicial.	100
Figura 23. Interpretación de FPM2 al razonamiento del estudiante 1.	102
Figura 24. Interpretación de FPM2 al razonamiento del estudiante 2.	103
Figura 25. Mirada profesional de FPM2.	107

Lista de Tablas

Tabla 1. Ejemplo de proceso configural de truncamiento.....	15
Tabla 2. Ejemplo de proceso configural de conjetura sin demostración.....	16
Tabla 3. Ejemplo de proceso configural de bucle.....	17
Tabla 4. Ejemplo de empleo del Modelo del Razonamiento Configural.....	19
Tabla 5. Problemas clásicos de probar en Geometría para el momento dos.....	26
Tabla 6. Planificación de las sesiones del módulo de enseñanza.....	32
Tabla 7. Categorías de análisis para la destreza de identificar.....	39
Tabla 8. Categorías de análisis para la destreza de interpretar.....	39
Tabla 9. Categorías de análisis para la destreza de toma de decisiones.....	40
Tabla 10. Análisis del proceso de solución de FPM1 al problema de probar 1.....	44
Tabla 11. Análisis del proceso de solución de FPM1 al problema de probar 2.....	52
Tabla 12. Análisis del proceso de solución de FPM1 al problema de probar 3.....	63
Tabla 13. Análisis del proceso de solución de FPM1 al problema de probar 4.....	75
Tabla 14. Análisis del proceso de solución de FPM2 al problema de probar 4.....	84
Tabla 15. Desarrollo de la mirada profesional de FPM1 y su conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural.....	96
Tabla 16. Desarrollo de la mirada profesional de FPM2 y su conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural.....	105

Presentación

El presente estudio se ubica en la línea de investigación de la mirada profesional. Caracteriza el desarrollo de la competencia docente mirar el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría en Futuros Profesores de Matemáticas (FPM) a partir del conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural. En ese sentido, las acciones de los FPM, fueron orientadas hacia el aprendizaje y puesta en uso del Modelo del Razonamiento Configural, este lo utilizaron para identificar aspectos claves en procesos de solución a problemas de probar en geometría, interpretar teóricamente su proceder y tomar decisiones en situaciones de enseñanza de la prueba en geometría. Identificar, interpretar y tomar decisiones son las tres destrezas interrelacionadas que conforman la mirada profesional (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010).

Los fundamentos teóricos del estudio tomaron como base la competencia docente mirada profesional y el Modelo del Razonamiento Configural. La mirada profesional se considera como un aspecto central en la formación de profesores debido a que la interpretación que realizan sobre las acciones de los estudiantes se relaciona con las decisiones que toman para su enseñanza. En tanto que el Modelo del Razonamiento Configural permite entender la coordinación de los procesos de visualización y consecuentemente, el Razonamiento Configural involucrado al momento de resolver problemas de probar en geometría.

Desde el punto de vista metodológico, se diseñó un módulo de enseñanza cuyo objetivo consistió en desarrollar la competencia docente “mirada profesional” en el contexto de la prueba en geometría para el caso de tres FPM, matriculados en una Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero con perfil profesional en Matemática Educativa. El módulo de enseñanza consistió en tres momentos principales: diagnóstico del conocimiento sobre la prueba en geometría, enseñanza-aprendizaje del Modelo del Razonamiento Configural mediante su instrucción y puesta en uso para el análisis de sus respuestas a problemas de probar en geometría y, empleo del Modelo del Razonamiento Configural en tareas profesionales.

El análisis cualitativo de los datos tomó como base las producciones escritas y verbales de los FPM en el proceso de solución de los problemas de probar y las tareas profesionales, en la etapa individual y grupal. En el análisis de sus producciones se puso especial interés en los aspectos que identificaron como claves para resolver un problema de probar, las interpretaciones que realizaron sobre sus procesos de solución y en su forma de tomar decisiones en escenarios de enseñanza aprendizaje de la prueba en geometría. Lo anterior, en relación con su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural.

De esta forma, para describir el desarrollo de la competencia mirada profesional, nos apoyamos de las tres destrezas que la conforman: identificar, interpretar y tomar decisiones. Las dos primeras, se utilizaron para analizar el conocimiento que evidenciaron los FPM sobre el Modelo del Razonamiento Configural, como resultado de la revisión que hicieron de sus soluciones a los problemas de probar en geometría. La última, se consideró para analizar las decisiones que los FPM tomaron como resultado de sus interpretaciones a las respuestas que dieron estudiantes de secundaria a problemas de probar.

El análisis que realizamos evidenció dos formas en las que los FPM razonan sobre el empleo del Modelo del Razonamiento Configural en la resolución de problemas de probar en

geometría. La primera de ellas refiere al uso del Modelo como una guía que da orden en el razonamiento para la resolución de un problema de probar y la segunda de ellas, refiere a su uso para analizar los razonamientos involucrados al resolver problemas de probar mediante su estructuración. Éstas dos formas se encuentran condicionados al entendimiento de los FPM sobre los elementos teóricos del Modelo del Razonamiento Configural: aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural.

Este documento se estructura en cinco capítulos. En el primero, se justifica y delimita el problema y objetivo de investigación. El segundo capítulo se constituye de los elementos teóricos que sustentaron el estudio. En el tercer capítulo se presentan los aspectos metodológicos que competen al diseño y organización del módulo de enseñanza, así como los aspectos considerados para el análisis de los datos obtenidos. En el cuarto capítulo se muestra el análisis de los datos y se incluyen los resultados en términos de la adquisición de las destrezas de identificar, interpretar y tomar decisiones en relación con el conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural que evidencian los FPM. Por último, en el quinto capítulo se exponen las conclusiones y reflexiones finales consecuentes de esta investigación.

Capítulo 1 Justificación y problema de investigación

1.1 Mirada profesional en el desarrollo profesional y formación docente

Un foco de atención en el desarrollo profesional docente y la formación de profesores de matemáticas es la competencia *mirada profesional*, al centrar la atención en la adquisición de destrezas que permitan poner en funcionamiento el conocimiento de un profesor o futuro profesor de matemáticas, para favorecer los procesos de enseñanza aprendizaje.

Se comparte la postura de Llinares (2013) respecto a que la mirada profesional permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de una manera que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. Así como señalan Sherin (2001), Sherin, Jacobs y Philipp (2011), esta competencia se apoya en el desarrollo de una perspectiva interpretativa de la enseñanza de las matemáticas mediante el uso en contexto del conocimiento de matemáticas por enseñar.

Considerando el panorama anterior y con base en la literatura especializada en lo que respecta a la mirada profesional, se observan dos temáticas principales en las que se ha centrado esta línea de investigación:

1. Investigaciones como las de Fernández, Valls y Llinares (2011); Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2014) identifican elementos matemáticos significativos y los comunican a profesores a fin de que los utilicen para la interpretación de la comprensión de los alumnos.
2. Investigaciones como las de Schack, Fisher, Thomas, Eisenhardt, Tasell y Yoder (2013); Wilson, Mojica y Confrey (2013) centran la atención en las características propias de estadios en una trayectoria de aprendizaje y en los saltos cognitivos necesarios para pasar de un estadio a otro, los cuales deben conocer los profesores.

Estas investigaciones previas han mostrado la pertinencia del desarrollo de la mirada profesional al concluir que aquello que los profesores observan del actuar de los estudiantes y cómo lo interpretan influye en la toma de decisiones durante los procesos de enseñanza de las matemáticas. La tendencia que se sigue en esta línea de investigación consiste en focalizar la atención en cómo los estudiantes para maestro identifican e interpretan la comprensión de los estudiantes en dominios particulares de contenido matemático (Fernández, Valls y Llinares, 2011).

Por tanto, un reto actual que enfrenta esta línea de investigación es la de caracterizar y desarrollar la competencia docente mirada profesional de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como un componente esencial para la práctica del profesor o futuro profesor de matemáticas.

Lo anterior llama la atención a realizar estudios de la mirada profesional en áreas específicas de las matemáticas a fin de que los profesores o futuros profesores de matemáticas, reconozcan cómo comprenden ciertos contenidos matemáticos los estudiantes, interpreten los razonamientos que evidencian y ello lo utilicen para tomar decisiones que favorezcan la progresión en su aprendizaje.

1.2 La prueba en Geometría

El área específica elegida en esta investigación es la geometría sobre el tema de la prueba. Entendemos por prueba a un argumento matemático para la verdad o falsedad de una declaración matemática que cumple con dos criterios (Stylianides, 2007):

1. Un argumento que califique como prueba debe usar declaraciones verdaderas, modos válidos de razonamiento y modos apropiados de representación.
2. Un argumento que califique como prueba debe usar enunciados, modos de razonamiento y modos de representación que sean aceptados, conocidos o dentro del alcance conceptual de los estudiantes en una comunidad de aula determinada.

La selección de este tema es porque la prueba es un aspecto relevante para el aprendizaje en matemáticas, por una parte, contribuye en la comprensión de los conceptos y por otra, da sentido a lo que se aprende. Así se evidencia en las demandas nacionales e internacionales al señalarse en documentos como Los principios y estándares para la educación matemática (NCTM, 2000), el Plan de estudios 2011 para la educación básica (SEP, 2011) y Aprendizajes Clave para la educación integral (SEP, 2017), que los estudiantes deben aprender a probar en matemáticas.

Según el NCTM (2000), un objetivo fundamental de la educación matemática es desarrollar la capacidad de efectuar pruebas al ayudar a los estudiantes a comprender porque algo es verdad. En este sentido, la geometría se concibe como un contexto natural de aprendizaje para la prueba debido a que promueve el razonar y ver la estructura axiomática de las matemáticas. También, la SEP (2017) menciona que, al término de la educación básica, el estudiante debe ser capaz de desarrollar argumentos, evaluar objetivos, resolver problemas, así como elaborar y justificar conclusiones. Se busca que los estudiantes comprendan la necesidad de justificar y argumentar sus planteamientos siguiendo un razonamiento deductivo.

Curricularmente, se ha evidenciado la relevancia de la prueba durante la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Aunado a ello, a lo largo de los años la prueba ha jugado un papel fundamental en la investigación matemática (Lakatos, 1976). Esto se puede apreciar desde los temas que se han explorado en esta línea de investigación.

Por una parte, una de las preguntas que se ha intentado responder desde la investigación es *¿Qué se entiende por prueba en educación matemática?* Algunas investigaciones (e.g Balacheff, 2002; Reid, 2005; Stylianides, 2008 y Weber, 2014) se han centrado en reflexionar sobre la definición de prueba en matemáticas. En estos trabajos se concluye que existen diferentes definiciones las cuales pueden ser adecuadas para diferentes propósitos de investigación. Lo antes mencionado implica que no puede ser ni posible, ni deseable, que todas las investigaciones adopten una definición común (Stylianides, Bieda y Morselli, 2016).

Otro tema que se ha explorado desde esta línea de investigación son las dificultades al momento de aprender y enseñar la prueba en geometría (Stylianides, Bieda y Morselli, 2016). Investigaciones como las de Lin y Wu (2007); Otten, Gilbertson, Males y Clarck (2014) y Buchbinder y Zaslavsky (2013) muestran dificultades en los estudiantes al realizar pruebas en geometría relacionadas con el planteamiento de conjeturas y el sobre apoyo en lo empírico.

Así mismo, investigaciones como las de Issic y Yeung (2017); Zeybeck (2016) y Zeybeck (2012) centran la atención en los profesores y futuros profesores al reconocer que estos son los responsables de transmitir el conocimiento, no obstante, evidencian dificultades en los profesores y futuros profesores al enseñar la prueba en geometría en relación con la incapacidad para construir y evaluar formas válidas para realizar justificaciones.

Por ejemplo, Issic y Yeung (2017) estudian las ideas de los profesores en formación y novatos sobre los roles de las pruebas formales y preformales en geometría. Los encuestados tendían a aceptar las pruebas preformales porque pueden demostrar visual o pragmáticamente la proposición del postulado, se indica la dependencia de los encuestados de probar proposiciones geométricas a través de una figura estática de objetos, mientras que las pruebas formales requieren definiciones completas y precisas de los objetos axiomáticos. El estudio revela un problema durante la formación de profesores: el programa de estudios no permite conectar el conocimiento pedagógico y sobre el contenido en términos de enseñanza de prueba e información de que una prueba requiere un rico conocimiento del contenido a través del razonamiento axiomático y deductivo.

Por su parte, Zeybek (2016) investiga el proceso de determinación de la verdad o falsedad de una declaración y la verificación de argumentos dados como pruebas válidas o contraejemplos apropiados a la vez que, se pretendió identificar cómo el conocimiento influyó en el proceso de evaluación de la construcción. La investigación se enmarca en un curso de geometría y medición y una sección de un curso de métodos matemáticos. Se concluyó que los futuros profesores presentan dificultades para validar argumentos y construir pruebas y contraejemplos. Asumen que una prueba es válida solo por su estructura o bien, no se reconocen indeterminaciones de las conclusiones inductivas.

Del mismo modo en Zeybek (2012), se describen los intentos de futuros profesores para construir pruebas y se examinan los diferentes argumentos con respecto a estas a fin de comprender el concepto que disponen sobre la prueba. Los futuros profesores que participaron en el estudio, no pudieron construir un proceso de prueba al no disponer de razonamientos deductivos e inductivos adecuados. No identifican la necesidad de validar una declaración si visualmente, parece correcta.

Otro aspecto a considerar es que la importancia de la prueba en la formación de futuros profesores se evidencia en el énfasis de la investigación en explorar esta área, no obstante, las investigaciones se han centrado en demostrar que existen dificultades al construir una prueba en geometría. Estudian las concepciones de prueba y evalúan si un futuro profesor es capaz o no, de distinguir argumentos válidos en pruebas matemáticas. Bajo este referente, falta realizar investigación que se interese en estudiar factores que contribuyan a preparar a los futuros profesores para la enseñanza de la prueba en geometría.

Tal como señala Stylianides, Bieda y Morselli (2016), es mayor la cantidad de estudios que han identificado problemas de instrucción con relación a la cantidad de estudios que propongan soluciones a esos problemas. Ante lo cual, los programas de formación y desarrollo profesional tienen un rol clave para preparar y apoyar a los docentes para enseñar sobre la prueba (Stylianides, Bieda y Morselli, 2016).

Consecuentemente, hemos concluido la relevancia de realizar una investigación que atienda la formación de profesores de matemáticas en el contexto de la prueba en geometría. Se trata

de aportar hacia la enseñanza de la prueba en geometría a partir del entendimiento de los futuros profesores de matemáticas sobre los razonamientos involucrados al resolver problemas de probar en geometría.

1.3 Mirada profesional en el contexto de la prueba en geometría

Como se ha expuesto, existe una problemática relacionada con la formación de profesores de matemáticas en el contexto de la prueba en geometría. Se requiere formular escenarios de aprendizaje para futuros profesores de matemáticas que les permita ser capaces de identificar elementos relevantes e interpretar los razonamientos involucrados al resolver problemas de probar en geometría a fin de incidir adecuadamente en su enseñanza.

Este trabajo asume tal problemática siguiendo la línea de investigación de la mirada profesional. Se centra la atención en el desarrollo de tal competencia a partir de estudiar cómo los futuros profesores de matemáticas *identifican* elementos significativos, *interpretan* teóricamente procesos de solución y *toman decisiones* de manera justificada en el contexto de la prueba en geometría.

Para atender el contexto de la prueba en geometría se brinda como herramienta conceptual para los futuros profesores de matemáticas, el conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural (Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010) ya que pone de manifiesto los procesos cognitivos involucrados al resolver problemas de probar en geometría.

Investigaciones como las de Saorín, Torregrosa y Quesada (2017); Clemente y Llinares (2015); Clemente, Llinares y Torregrosa (2017); Clemente y Llinares (2013); Clemente y Llinares (2014) y Prior y Torregrosa (2013); han comunicado al Modelo del Razonamiento Configural como un medio para describir las respuestas de los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría a partir del razonamiento que evidencian. El razonamiento evidenciado se interpreta en términos de las aprehensiones discursivas, aprehensiones operativas y procesos configurales.

Lo que concluimos a partir de la revisión a estas investigaciones especializadas, es que el razonamiento configural es un proceso que el alumno genera con frecuencia para resolver y para transmitir la solución de un problema de probar.

Dicho lo anterior, esta investigación aporta:

1. El estudio del desarrollo de la mirada profesional de los Futuros Profesores de Matemáticas (FPM) en el contexto de la prueba en geometría.
2. La articulación metodológica de la competencia docente “mirada profesional” y el Modelo del Razonamiento Configural.

1.4 Pregunta y objetivo de investigación

La pregunta de investigación que aquí se plantea es la siguiente:

¿Qué caracteriza el desarrollo de la competencia docente mirar el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría en Futuros Profesores de Matemáticas (FPM) a partir del conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural?

Para dar respuesta a la anterior cuestión se plantea el siguiente objetivo de investigación:

Caracterizar el desarrollo de la competencia docente mirar el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría en FPM a partir del conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural.

Los programas de formación docente enfrentan desafíos tales como, la adquisición y desarrollo de las competencias necesarias del FPM para el ejercicio de su práctica. Una de las competencias docentes sobre la que se ha reflexionado y conceptualizado en la investigación en Didáctica de la Matemática es la de “mirar con sentido” o “mirar profesionalmente” los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Llinares, 2011).

En este contexto, son numerosas las investigaciones sobre la competencia mirada profesional (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Llinares, 2012; Stokero, 2014; Sánchez-Matamoros, Fernández, Llinares y Valls, 2013 y Wilson, Mojica y Confrey, 2013) las que han evidenciado que es posible diseñar cursos de formación, módulos de enseñanza, entre otros, que apoyen el desarrollo de la mirada profesional sobre las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Tales investigaciones se han apoyado de trayectorias de aprendizaje como un referente teórico para los FPM a fin de facilitar las conexiones entre los objetivos de aprendizaje y las actividades de enseñanza (Clements y Sarama, 2004; Sarama, Clements, Barrett, Van Dine y McDonel, 2011).

En esta investigación se estudió el desarrollo de la competencia mirada profesional del razonamiento de estudiantes al resolver problemas de probar en geometría, en los FPM. Para ello, siguiendo la estructura de otras investigaciones (Schack, Fisher, Thomas, Eisenhardt, Tasell y Yoder, 2013; Wilson, Mojica y Confrey, 2013) se diseñó un módulo de enseñanza sobre la prueba en geometría.

Se pretendió desarrollar la competencia de mirada profesional (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010) incorporando en los FPM, el conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural (Torregrosa y Quesada, 2007) como una herramienta conceptual para el desarrollo de la mirada profesional de los razonamientos que siguen los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría a fin de tomar decisiones que incidan favorablemente en la progresión de su aprendizaje.

2.1 Competencia Mirada Profesional

La mirada profesional es un aspecto importante en la formación de FPM ya que estudia tres destrezas que se precisan durante la enseñanza de las matemáticas. Según Zapatera y Callejo (2017) la mirada profesional es un término usado para indicar el acto de observar o reconocer los fenómenos significativos y actuar en consecuencia. En el caso de la enseñanza, Van Es y Sherin (2002) indican que tener una mirada profesional implica identificar y reconocer los aspectos relevantes en una situación de aula, aplicar el conocimiento sobre el contexto para adoptar decisiones y conectar los aspectos identificados con principios generales de enseñanza y aprendizaje.

Para entender la mirada profesional en FPM en el presente estudio, nos apoyamos de la conceptualización de Jacobs, Lamb y Philipp (2010) quienes la plantean como el conjunto de tres destrezas interrelacionadas:

- Identificar las estrategias usadas por los estudiantes.

- Interpretar la comprensión de los estudiantes.
- Decidir las acciones para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en función de la comprensión de los estudiantes.

La primera destreza implica identificar los aspectos matemáticos significativos en las estrategias que usan los estudiantes porque sus detalles proporcionan una ventana para mirar su pensamiento matemático (Carpenter, Franke y Levi, 2003).

En tanto que la segunda destreza implica explicar y teorizar las observaciones para relacionarlas con contenidos matemáticos y evaluarlas para tomar decisiones adecuadas (Mason, 2002).

Respecto a la última destreza, se coincide con Van Es y Sherin (2002) respecto a que, las acciones para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, indican que el objetivo de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es hacer efectivas las repuestas de instrucción.

La relevancia de la competencia docente en la investigación es que contribuye al desarrollo de una forma de mirar profesionalmente en FPM, los razonamientos que siguen los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría a fin de tomar decisiones que incidan favorablemente en la progresión de su aprendizaje. Tal como plantea Llinares (2013), la mirada profesional se requiere desarrollar durante la formación de profesores y la “expertise” se va consiguiendo paulatinamente a lo largo de su vida profesional.

Para estudiar la mirada profesional en el contexto de la prueba en geometría, consideramos que los FPM:

- Identifiquen como aspectos matemáticos relevantes: 1) las representaciones geométricas y sus modificaciones, 2) los conceptos y las propiedades geométricas que asocian a las representaciones geométricas y sus modificaciones al resolver problemas de probar.
- Interpreten teóricamente el razonamiento seguido al resolver un problema de probar en geometría utilizando el Modelo del Razonamiento Configural.
- Tomen decisiones para la progresión del aprendizaje de estudiantes sobre la prueba en geometría con base en su razonamiento.

2.2 Modelo del Razonamiento Configural

En este estudio se sigue una perspectiva cognitiva del aprendizaje de la prueba en geometría al examinar los procesos cognitivos que evidencia una persona durante su resolución a problemas de probar. Se coincide en que la actividad geométrica involucra los procesos cognitivos de visualización y de razonamiento los cuales, son necesarios que un FPM analice desde un punto de vista de la enseñanza.

Así, utilizamos el Modelo del Razonamiento Configural formulado por Torregrosa y Quesada (2007), como una herramienta conceptual para los FPM en el análisis de los procesos cognitivos presentes al resolver problemas de probar en geometría. Dicho Modelo incorpora el significado del concepto figural de Fischbein (1993) y el Modelo Cognitivo de Duval (1995; 1998; 1999) como se leerá en seguida.

2.2.1 Perspectiva cognitiva del aprendizaje en geometría

La perspectiva cognitiva refiere a la aceptación de la existencia de procesos cognitivos que intervienen en el aprendizaje de la geometría. Esto se refleja en las ideas de Duval (1995, 1998, 1999) estructuradas en su Modelo Cognitivo del Aprendizaje Geométrico el cual, incorpora y matiza algunas de las ideas del Modelo Configural de Fischbein (1993).

Del Modelo Configural de Fischbein (1993), Duval (1995) toma como base el concepto figural en el que se reconoce que las entidades mentales no son imágenes o conceptos, sino que ambos, se fusionan en un único objeto mental. Esto nos permite diferenciar entre dibujo y figura, el primero lo entendemos como una representación gráfica de una figura sobre un papel, un ordenador o un modelo físico, en tanto que la segunda, la referimos a una imagen mental de un objeto físico.

Consecuentemente, cuando una persona resuelve problemas de geometría, sigue un proceso deductivo que consiste en “ver” de distintas maneras a las figuras y con ello, abstraer conceptos y propiedades geométricas que conoce. Siguiendo esta dirección, y en concordancia con lo planteado por Duval (1998), se reconoce que la geometría involucra tres clases de procesos cognitivos, caracterizados en Ciscár (2015) como sigue:

- Procesos de visualización: se relacionan con la representación de proposiciones y resultados, así como con la exploración heurística de una situación compleja, en el logro de una visión sinóptica de la misma y en la obtención de una verificación subjetiva de la misma.
- Procesos de razonamiento: se encuentra en relación con procesos discursivos. Facilitan la extensión del conocimiento, la demostración y la explicación.
- Procesos de construcción: se construyen configuraciones como modelos en los que la acción sobre los representantes y los resultados obtenidos establecen relaciones con los objetos matemáticos representados.

Desde el punto de vista de la formación de los FPM resulta útil distinguir tales procesos cognitivos como una actividad necesaria para analizar e interpretar el conocimiento matemático desde un punto de vista del aprendizaje (Duval, 1998). Destacamos que a diferencia de otros modelos teóricos anteriores sobre el aprendizaje en geometría (e.g. Krutetskii, 1976 y Presmeg, 1986) este modelo, distingue el proceso cognitivo de las representaciones y permite mirar de manera simultánea, lo conceptual y lo figural como un componente clave del razonamiento.

En esta investigación juegan un papel importante los procesos cognitivos de visualización y de razonamiento propuestos por Duval (1995) debido a que cuando un estudiante resuelve un problema de probar en geometría se produce un cambio continuo entre visualizar y formular un discurso. Los procesos cognitivos de visualización y de razonamiento están intrínsecamente conectados y su sinergia es necesaria para la adquisición de competencias en la resolución de problemas geométricos (Duval, 2007) tal como se profundizará enseguida.

2.2.2 Procesos cognitivos de visualización

Por visualización entendemos la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa, según lo planteado por Hershkowitz, Parzysz y Van Dermolen (1996). Al centrarnos en problemas de geometría, nos interesa el proceso o acción de transferencia de un dibujo a una figura o viceversa.

Para entender la comprensión de los conceptos geométricos Duval (1998) emplea el concepto de aprehensión en tanto, distintas formas de ver una figura matemáticamente y caracteriza tres tipos de aprehensión considerados en los procesos de visualización, como sigue:

- **Aprehensión perceptiva:** consiste en una identificación simple de una configuración. Es la primera en ser usada a lo largo de toda la etapa educativa y también la primera que aparece en el desarrollo cognitivo del alumno.



Figura 1. Reconocimiento de triángulos y rectángulos

Por ejemplo, en la Figura 1 los triángulos pueden ser vistos como parte del tejado de una casa y los rectángulos como ventanas de la misma. Cada una de estas afirmaciones puede ser entendida como el resultado de una aprehensión perceptiva.

- **Aprehensión discursiva:** acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas).

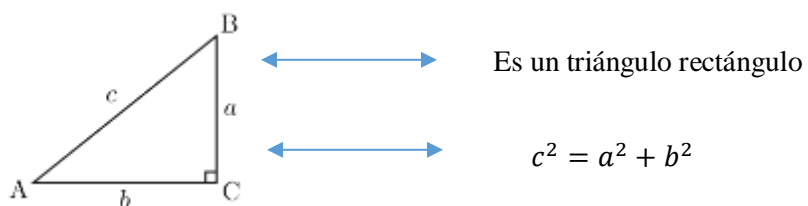


Figura 2. Asociación de una configuración geométrica con el concepto de triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras

Esto sucede, por ejemplo, cuando al dibujo de la Figura 2 se le asocia la afirmación “*ABC* es un triángulo rectángulo” señalando sus vértices con las letras *A, B, C* o bien, cuando al mismo dibujo, se le asocia el teorema de Pitágoras, señalando como

hipotenusa y catetos, los segmentos de línea recta c , a , b , respectivamente. Para ello, el observador debe haber identificado en el dibujo lo que caracteriza a un triángulo rectángulo y sus propiedades (*del anclaje visual al anclaje discursivo*).

También, puede suceder en sentido inverso por ejemplo, ante la afirmación “ ABC es un triángulo rectángulo” el estudiante tiene la capacidad para realizar el dibujo de un polígono que cumpla las características de ser triángulo y rectángulo (*del anclaje discursivo al anclaje visual*).

- **Aprehensión operativa:** se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación a la configuración inicial para resolver un problema geométrico.

Por ejemplo, la Figura 3 ilustra una prueba del Teorema de Pitágoras, realizada por Bhaskara en el siglo XII: *en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa ($a^2 + b^2 = c^2$)*.

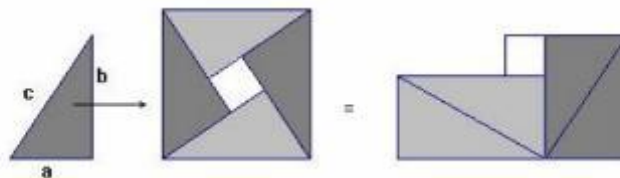


Figura 3. Figura inicial, configuración agregada y reconfiguración tomada de Nelsen (1993, citada en Torregrosa y Quesada, 2007, p. 284)

En las modificaciones hechas, el triángulo rectángulo inicial se incluye en una configuración geométrica más amplia, un cuadrado de lado c . Una vez identificadas las subconfiguraciones formadas por los triángulos, sus lados y el cuadrado situado entre ellos, se cambia la configuración, moviéndolos como piezas de un puzle para obtener otra figura.

De esta forma, se distinguen dos tipos de modificaciones: 1) Aprehensión operativa de cambio figural: cuando a la configuración inicial se le añaden o quitan nuevos elementos geométricos 2) Aprehensión operativa de reconfiguración: cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como las piezas de un puzle.

En este proceso, se coincide con Duval (2007) en que la aprehensión perceptiva está conectada con la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa. La aprehensión perceptiva se presenta de forma implícita como la base para el desenvolvimiento de las otras dos aprehensiones así, conforme se desarrollan, queda más atenuada la acción en la que subyace la aprehensión perceptiva solamente como un nexo entre ellas.

2.2.3 Procesos cognitivos de razonamiento

Se entiende por razonamiento a cualquier proceso que permite extraer nueva información de informaciones previas, ya sean aportadas por el problema o derivadas del conocimiento anterior. Desde un punto de vista cognitivo del aprendizaje de geometría, hay diferentes tipos

de procesos que dependen de la forma en la que la información es presentada y también, de la forma en la que la información puede ser organizada (Duval, 1998).

Cuando resolvemos un problema en geometría, nos proporcionan información o bien, la obtenemos a partir de la reorganización de una figura geométrica y de los conocimientos geométricos que se dispongan, en todo caso, la información debe procesarse a un nivel representativo y simbólico. En este contexto, distinguimos tres procesos cognitivos al resolver problemas de probar en geometría en concordancia con Duval (1998):

- Proceso puramente configural: descrito anteriormente como aprehensión operativa.
- Proceso discursivo natural: espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación. Para poder identificarlo es necesario distinguir las operaciones discursivas básicas, como los conectores “y”, “o”, además de los símbolos verbales abreviados (“= ” significa “produce”; “- ” indica “quitar de”) que pueden aparecer en la descripción, la explicación o la argumentación utilizada en la resolución de los problemas.
- Proceso discursivo teórico: realizado mediante la deducción. Utiliza sólo teoremas, axiomas o definiciones para llegar a una conclusión, está estructurado deductivamente y ocurre en un registro estrictamente simbólico o en un lenguaje natural.

Destaca el hecho de que la aprehensión operativa es independiente de cualquier proceso discursivo. No obstante, la visualización puede incrustarse en un proceso discursivo natural (Véase Figura 3 y su descripción) pero, un proceso puramente configural no puede integrarse en un discurso teórico incluso si a veces da las ideas clave para una prueba. Lo anterior es consecuente de que, en geometría cuando se razona para probar se requiere usar proposiciones, teoremas, axiomas o definiciones.

Se consideran estos tipos de procesos cognitivos de razonamiento, a fin de identificar sus características infiriéndolas de los análisis sobre los registros escritos o verbales de FPM sobre la resolución de problemas de probar en geometría. Interesa entonces, disponer de una herramienta conceptual que permita caracterizar el razonamiento *proceso configural*, en el caso cuando los procesos de resolución dan evidencias de coordinación entre las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas.

2.2.4 El razonamiento como un proceso configural

En este trabajo aceptamos que el modelo cognitivo de Duval (1995, 1998, 1999) se complementa incluyendo el proceso configurativo desde la perspectiva de Torregrosa y Quesada (2007). Tales autores lo reconocen como un proceso de razonamiento involucrado en la resolución de problemas de probar en geometría que pone de manifiesto las interacciones entre configuraciones iniciales y posibles modificaciones de acuerdo con definiciones, teoremas y propiedades geométricas necesarias para probar en geometría.

Así, entendemos el proceso configural como el desarrollo de la acción coordinada *aprehensión discursiva/aprehensión operativa* que realiza una persona cuando resuelve un

problema de probar en geometría. Se genera una interacción entre la configuración inicial y sus posibles modificaciones con las afirmaciones matemáticas adecuadas (Torregrosa y Quesada, 2007).

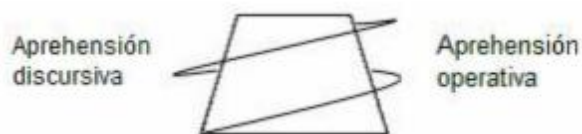


Figura 4. Coordinación de la comprensión discursiva y operativa en la resolución de problemas de probar tomada de Torregrosa y Quesada (2007), p.90.

La coordinación entre la comprensión operativa y la discursiva puede propiciar alguno de los siguientes casos:

1. La coordinación da una solución al problema. En este caso se distinguen dos clases de procesos configurales:

- De truncamiento: cuando la coordinación proporciona la “idea” para resolver deductivamente el problema. El proceso configural permite conjeturar afirmaciones que se prueban a través de la deducción.
- De conjetura sin demostración: El proceso configural permite resolver el problema aceptando las conjeturas mediante percepción simple.

2. La coordinación no consigue una solución:

- Proceso configural de bucle: se llega a una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución y, por tanto, hay un estancamiento del razonamiento producido.

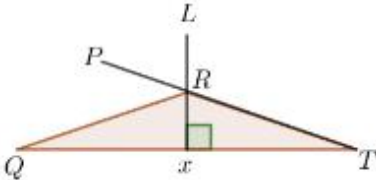
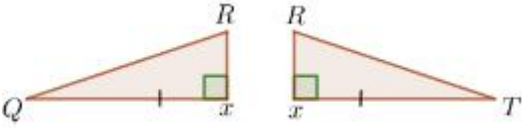
A continuación, se presentan ejemplos de cada uno de los casos que nos permiten ilustrar el modelo teórico. Para ello, vamos a analizar las acciones posibles al resolver un problema de probar en términos de las distintas coordinaciones entre la comprensión operativa y la comprensión discursiva.

En el siguiente ejemplo ilustramos el proceso configural de truncamiento en el cual el resolutor percibe como “idea clave” la prueba de conjetura $\overline{RQ} = \overline{RT}$ ante lo cual, decide modificar la configuración geométrica descomponiéndola en dos triángulos y utilizar el concepto de congruencia de triángulos para probar lo solicitado.

Problema. La recta L es mediatriz de \overline{QT} . La recta \overline{PT} corta a L en el punto R tal que P es un punto que no pertenece a \overline{QT} . Probar que $m\overline{PT} = m\overline{PR} + m\overline{RQ}$.

Tabla 1

Ejemplo de proceso configural de truncamiento

Fragmentos/Figuras de la transcripción de un proceso de solución	Características del proceso de solución
	<p>Representa la situación inicial (aprehensión operativa) mediante las afirmaciones del enunciado (aprehensión discursiva):</p> <p>La recta L es mediatriz de \overline{QT} La recta \overline{PT} corta a L en el punto R</p>
<p>La mediatriz L es perpendicular a \overline{QT} (forma ángulos rectos) y además la distancia de Q y T a la recta mediatriz es la misma</p>	<p>Asocia el concepto de mediatriz a la representación inicial (aprehensión discursiva) y añade las marcas de ángulo recto y la condición de equidistancia (aprehensión operativa).</p>
<p>Hay que demostrar que la distancia \overline{RQ} es la misma que la de \overline{RT}</p>	<p>Plantea la conjetura de $\overline{RQ} = \overline{RT}$ al visualizar el concepto de distancia en la representación geométrica inicial. (Asociación que proporciona la idea clave que lleva a la solución).</p>
<p>Identificó los triángulos ΔQRX y ΔTRX y tengo:</p> 	<p>Modifica la representación inicial al extraer dos triángulos ΔQRX y ΔTRX (aprehensión operativa) utilizando el concepto de triángulo (aprehensión discursiva).</p>
<p>Congruencia LAL</p>	<p>Asocia a la representación resultante (aprehensión operativa) la propiedad de congruencia de triángulos (aprehensión discursiva).</p>
<p>Lado $\overline{RX} \equiv \overline{RX}$ (lado común) Ángulo $\angle RXQ = \angle RXT$ (la mediatriz es perpendicular y forma ángulos rectos: $\angle RXQ = 90^\circ = \angle RXT$)</p>	<p>Verifica la congruencia de los triángulos obteniendo la tesis de la afirmación (discurso teórico).</p>
<p>Lado $\overline{QX} \equiv \overline{TX}$ (la mediatriz divide al segmento en partes iguales, es perpendicular y pasa por el punto medio)</p>	
<p>La distancia de $\overline{RQ} = \overline{RT}$</p>	

El resolutor hizo en varias ocasiones el ciclo aprehensión discursiva/aprehensión operativa hasta que encontró la “idea” que resolvía el problema. A partir de ello, y con apoyo de las nociones geométricas, realizó un discurso teórico.

Seguido a esto, ejemplificamos el proceso configural de conjetura sin demostración en el cual el resolutor plantea y acepta la conjetura de ángulo recto mediante percepción simple.

Problema: Demuestra que el ángulo APB es recto

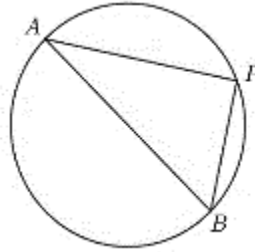


Tabla 2
Ejemplo de proceso configural de conjetura sin demostración

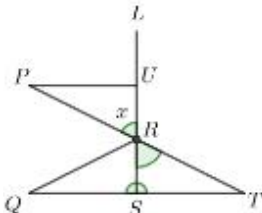
Fragmentos/Figuras de la transcripción de un proceso de solución	Características del proceso de solución
	<p>Modifica la representación inicial al extraer los segmentos involucrados y los mide (aprehensión operativa) para ello hace uso del concepto de segmento (aprehensión discursiva).</p>
<p>Porque el ángulo tiene una abertura de 90° y todos los ángulos rectos tienen 90°</p>	<p>Asocia la definición de ángulo recto (aprehensión discursiva) a la representación resultante (aprehensión operativa).</p>

El estudiante realizó una comprobación de la tesis a probar para el caso particular de la representación geométrica inicial compuesta por segmentos de línea recta. Percibió a través del uso de instrumentos de medida (transportador) que la afirmación es cierta.

Por último, en el siguiente ejemplo ilustramos el proceso configural de bucle en el que el resolutor llega a una situación de bloqueo que no le permite avanzar hacia la solución.

Problema. La recta L es mediatriz de \overline{QT} . La recta \overline{PT} corta a L en el punto R tal que P es un punto que no pertenece a \overline{QT} . Probar que $m\overline{PT} = m\overline{PR} + m\overline{RQ}$.

Tabla 3
Ejemplo de proceso configural de bucle

Fragmentos/Figuras de la transcripción de un proceso de solución	Característica del proceso de solución
Probar que $m\overline{PT} = m\overline{PR} + m\overline{PQ}$.	Identifica la tesis que debe demostrarse, pero comete un error $m\overline{PT} = m\overline{PR} + m\overline{PQ}$
	Representa la situación geométrica inicial (aprehensión operativa) mediante las afirmaciones del enunciado (aprehensión discursiva).
$\overline{QS} \equiv \overline{ST}$. Ya que al estar cortada por la mediana, la corta en dos partes iguales.	En la representación inicial introduce algunos elementos geométricos “nuevos” como el segmento \overline{PU} y los ángulos X y Y Asocia la definición de mediatriz (aprehensión discursiva) a la representación resultante (aprehensión operativa), aunque el resolutor la confunde con la mediana.
Por lo tanto deducimos que $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$	Establece un conjetura de lo anterior
Para demostrar $\overline{PR} \equiv \overline{RT}$ entonces, $\Delta PRU \equiv \Delta RST$	Reconoce que para probar $\overline{PR} \equiv \overline{RT}$ debe probar $\Delta PRU \equiv \Delta RST$ (congruencia LAL). Esta asociación entre la representación de los triángulos (aprehensión operativa) y el concepto de congruencia (aprehensión discursiva) no tiene interés para la resolución del problema ya que puede ser cierta en este caso particular por la forma que ha tomado la representación, pero no en el caso general que demanda el problema.
$\overline{RU} \equiv \overline{RS}$	
$\overline{ST} \equiv \overline{PU}$ por lados opuestos a ángulos congruentes	
$\angle PXU \equiv \angle TYS$	
LAL por lo que $\Delta PRU \equiv \Delta RST$ entonces $\overline{PR} \equiv \overline{RT}$	
Por lo que $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$	
$\overline{PT} = \overline{PR} + \overline{RQ}$	

La verificación de la hipótesis no es posible debido a que el estudiante planteó una conjetura indemostrable (asociación entre los dibujos de los triángulos y el concepto de congruencia) con lo que se entra en una situación de bloqueo que no permitió el avance hacia la solución.

El proceso configural organiza el actuar de un resolutor, de tal forma que puede encontrarse inmerso en un discurso natural que: 1) lo explique o 2) de la “idea” para organizar un discurso teórico.

En la investigación en Didáctica de la Matemática de la misma naturaleza, se ha denominado Razonamiento Configural al razonamiento que emerge al resolver problemas de probar en geometría, involucra distintos procesos de visualización y de razonamiento, y se caracteriza

en términos de la coordinación entre la comprensión discursiva y la comprensión operativa (Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010).

El Modelo del Razonamiento Configuracional sigue la línea trabajada por Duval (1995) y permite el estudio de la coordinación entre los procesos visuales y los de razonamiento. Desde este Modelo se reconoce que cuando se plantea un problema de geometría, en algunos casos el enunciado viene acompañado de un dibujo que representa la situación geométrica inicial; en otros, el estudiante tiene que representarla. En ambas situaciones, el alumno lleva a cabo una comprensión discursiva para asociar una o varias afirmaciones matemáticas del enunciado, a la configuración de puntos que lo acompaña o se construye. A continuación, analiza la información y, con cierta frecuencia, hace modificaciones a la configuración inicial lo que supone una comprensión operativa. Como consecuencia, se pueden necesitar nuevas asociaciones que, a su vez, puede implicar nuevos cambios, repitiéndose el ciclo comprensión discursiva/comprehnión operativa de manera coordinada, hasta que se alcanza la solución o se abandona la estrategia seguida. Un esquema que muestra lo antes descrito es el siguiente (Véase Figura 5):

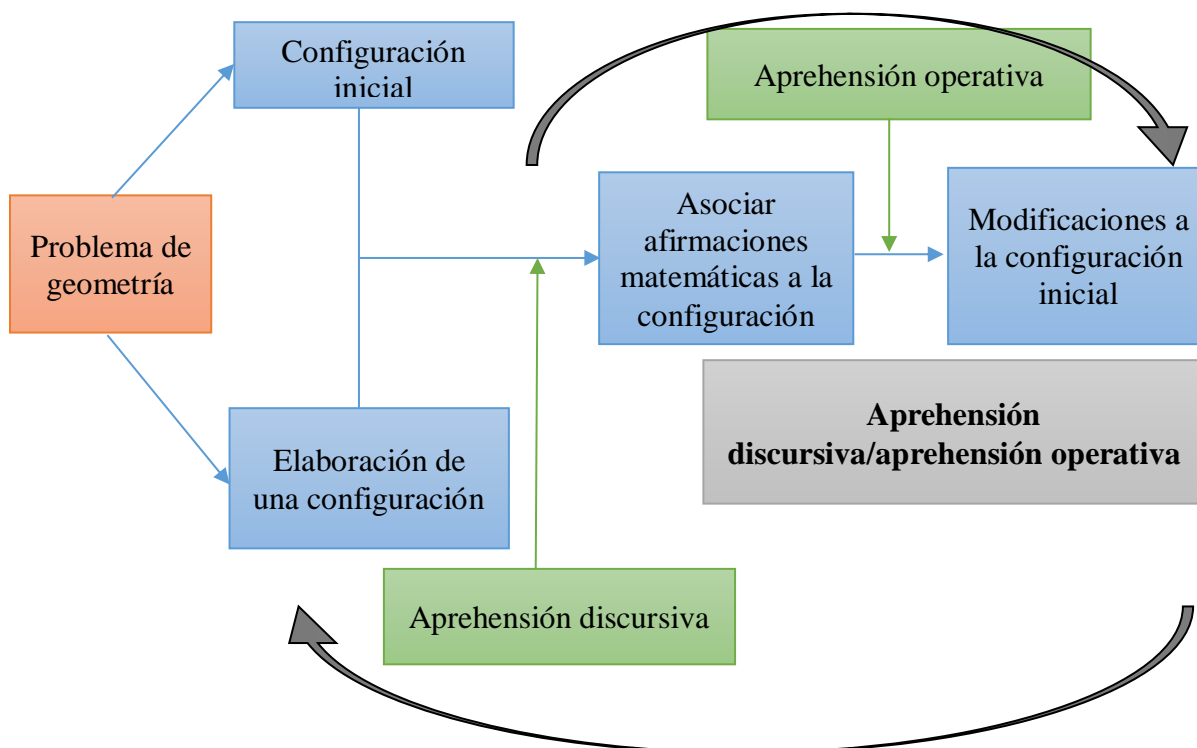


Figura 5. Descripción del Modelo del Razonamiento Configuracional.

La relevancia del Modelo del Razonamiento Configuracional para el desarrollo de esta investigación consiste en que:

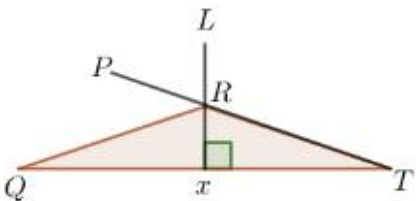
1. Permite caracterizar las interacciones entre los procesos de visualización y de razonamiento que intervienen en la resolución de problemas de probar de geometría (Quesada, 2014).

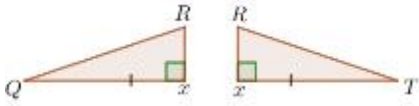
2. Puede ser comunicada como una herramienta conceptual para interpretar el razonamiento que una persona evidencia al resolver un problema de probar, como se ha manifestado en distintas investigaciones (e.g. Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017; Clemente, Llinares y Torregrosa, 2017 y Clemente y Llinares, 2015).

En nuestro caso, hemos entendido que los FPM utilizan el Modelo del Razonamiento Configural como herramienta conceptual cuando interpretan las acciones realizadas de un estudiante al resolver un problema de probar en geometría, en términos de las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales. De esta forma, entienden el razonamiento que sigue un estudiante al resolver un problema de probar y con base en ello, toman decisiones que favorezcan en la progresión de su aprendizaje. Un ejemplo de ello se muestra enseguida:

Problema. La recta L es mediatriz de \overline{QT} . La recta \overline{PT} corta a L en el punto R tal que P es un punto que no pertenece a \overline{QT} . Probar que $m\overline{PT} = m\overline{PR} + m\overline{RQ}$.

Tabla 4
Ejemplo de empleo del Modelo del Razonamiento Configural

Fragmentos/Figuras de la transcripción de la solución	Interpretación de la resolución	Proceso configural
	<p>Representa la situación inicial (<i>aprehensión operativa</i>) mediante las afirmaciones del enunciado (<i>aprehensión discursiva</i>): La recta L es mediatriz de \overline{QT} La recta \overline{PT} corta a L en el punto R.</p>	<p>La coordinación <i>aprehensión discursiva/aprehensión operativa</i> conlleva tener una configuración como referente visual del problema de probar.</p>
<p>La mediatriz L es perpendicular a QT (forma ángulos rectos)</p>	<p>Asocia la definición de mediatriz a la representación inicial (<i>aprehensión discursiva</i>) mediante las marcas de ángulo recto (<i>aprehensión operativa</i>).</p>	<p>La coordinación <i>aprehensión discursiva/aprehensión operativa</i> propicia identificar propiedades útiles para la resolución al problema de probar.</p>
<p>Hay que demostrar que la distancia \overline{RQ} es la misma que la de \overline{RT}</p>	<p>El estudiante asocia la igualdad a probar (<i>aprehensión discursiva</i>) a la representación inicial (<i>aprehensión operativa</i>)</p>	<p>La coordinación <i>aprehensión discursiva/aprehensión operativa</i> conlleva al planteamiento de una conjetura: “La distancia \overline{RQ} es la misma que la de \overline{RT}” que contribuye a la solución del problema de probar.</p>

Determino los triángulos ΔQRX y ΔTRX y tengo:	Identifica subconfiguraciones geométricas (<i>aprehensión operativa</i>) de triángulos (<i>aprehensión discursiva</i>).	La coordinación <i>aprehensión operativa/aprehensión discursiva</i> propicia tener una subconfiguración útil para la solución del problema de probar.
	Asocia a las subconfiguraciones geométricas (<i>aprehensión operativa</i>) el concepto de congruencia de triángulos (<i>aprehensión discursiva</i>).	La coordinación <i>aprehensión operativa/aprehensión discursiva</i> conlleva a la demostración de la conjetura mediante un discurso teórico.
Lado $\overline{RX} \equiv \overline{RX}$ (lado común) Ángulo $\angle RXQ = \angle RXT$ (la mediatriz es perpendicular y forma ángulos rectos: $\angle RXQ = 90^\circ = \angle RXT$)	Verifica la congruencia de los triángulos (<i>aprehensión operativa</i>) obteniendo la tesis de la afirmación (<i>aprehensión discursiva</i>).	
Lado $\overline{QX} \equiv \overline{XT}$ (la mediatriz divide al segmento en partes iguales, es perpendicular y pasa por el punto medio)		
La distancia de $\overline{RQ} = \overline{RT}$		

2.3 Mirada Profesional y Modelo del Razonamiento Configural

Los fundamentos teóricos del estudio toman como base la competencia de mirada profesional (Jacobs, Lamb y Philip, 2010) y el Modelo del Razonamiento Configural (Torregrosa y Quesada, 2007). De esta forma se espera contribuir en el desarrollo de la mirada profesional en FPM mediante el aprendizaje y uso del Modelo del Razonamiento Configural para **identificar** aspectos relevantes en procesos de solución a problemas de probar, **interpretar** teóricamente tales aspectos y con base en ello, **tomar decisiones** que favorezcan la progresión en el aprendizaje de los estudiantes sobre la prueba en geometría.

Así, se espera que los FPM, más que centrarse en la identificación de figuras y conceptos geométricos que emplean los estudiantes, centren la atención en la coordinación de las *aprehensiones operativas* y las *aprehensiones discursivas* a fin de comprender los razonamientos de los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría.

Como se ha expuesto en apartados anteriores, se distinguen ciertas problemáticas en la enseñanza de la prueba en geometría por parte de los FPM, asociadas a la falta de entendimiento de los razonamientos de los estudiantes al resolver problemas de probar esto, lo asociamos a la falta del desarrollo de la competencia de mirada profesional. Lo anterior, imposibilita formas de intervención adecuadas para la progresión en el aprendizaje de la prueba en geometría en estudiantes.

La principal dificultad, como afirma Gutiérrez (2005), está en la necesidad de conocer lo que pasa por la cabeza de los estudiantes cuando están envueltos en una actividad matemática, cuáles son sus procesos de razonamiento, cómo analizan y transforman la información que les llega del exterior, cuándo y cómo toman decisiones, etc. Todo ello para tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Se plantea que el análisis de las respuestas de los estudiantes a problemas de probar mediante el Modelo del Razonamiento Configural contribuirá a intervenciones más eficaces en la progresión en el aprendizaje geométrico al permitir en el FPM un mayor entendimiento sobre sus respuestas.

3. Metodología

La investigación sigue un enfoque cualitativo debido a que incluye la aproximación a un objeto de estudio a fin de entenderlo o interpretarlo en términos de los significados que la gente les otorga (Denzin y Lincoln, 1994). En nuestro trabajo, tomamos por objeto de estudio la mirada profesional y nos interesó entender su desarrollo en FPM en un contexto poco estudiado como es la prueba en geometría.

Respecto al diseño de investigación, se realizó un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 2005) debido a que analizamos a profundidad un caso, tres FPM, a partir de lo cual se generalizó sobre la caracterización del desarrollo de la mirada profesional en FPM al mirar el razonamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas de probar en geometría a través del uso del Modelo del Razonamiento Configural.

3.1 Diseño de la investigación: Estudio de caso

Partimos del objetivo general para delimitar el estudio de caso como diseño de la investigación, elegimos tres FPM como las unidades que componen el caso de estudio. Los FPM participaron en un Módulo de Enseñanza¹ diseñado como el escenario para recoger datos sobre el desarrollo de su mirada profesional cuando analizan los razonamientos involucrados al resolver distintos problemas de probar en geometría a través del uso del Modelo del Razonamiento Configural como herramienta conceptual.

Luego, el análisis de los datos obtenidos se sustentó de la interpretación de los procesos de resolución de problemas de probar en geometría que los FPM realizaron en momentos diferenciados, para ello utilizamos el constructo teórico de la mirada profesional y el Modelo del Razonamiento Configural.

3.1.1 Unidades del estudio de caso

Se seleccionaron tres Futuros Profesores de Matemáticas como las unidades del estudio de caso, dos hombres y una mujer de entre 20 a 22 años, matriculados en el octavo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, con perfil profesional en Matemática Educativa.

Para su selección se consideraron los siguientes aspectos:

- *Académicos:* a) con orientación de su perfil profesional en Matemática Educativa y b) con antecedentes académicos en temas de geometría euclidiana. Con ello se garantizó que las unidades del estudio de caso fueran FPM y que dispusieran de conocimiento matemático antecedente sobre la prueba en geometría.

¹ En esta investigación “se concibe el módulo como una unidad estructural y funcional dirigida a la formación de competencias en el profesional” (González, 2015, p.1).

- *Administrativos:* a) autorización de los profesores responsables del grupo y b) disposición de los estudiantes para colaborar en el estudio. Los FPM que aceptaron participar de forma voluntaria fueron los que se seleccionaron para realizar esta investigación.

Para identificar en qué semestres del plan de estudios se podría ubicar a estudiantes con perfil de egreso en Matemática Educativa de la licenciatura en Matemáticas de la UAGro y de su experiencia con tópicos de geometría euclidiana, se recurrió a tres fuentes de información: 1) El plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas 2009 (UAGro., 2009), 2) Los programas de matemáticas de las unidades de aprendizaje que habían cursado y estaban cursando al momento en que se realizó este trabajo, y; 3) los libros de texto que se emplean habitualmente en su formación, relativos tanto al área de geometría como de aquellas en que se estudian temas de esta área, como historia y epistemología de la matemática.

La revisión de estas fuentes, evidenció: 1) Que en los fundamentos y perfil de egreso del plan de estudios de la licenciatura en matemáticas 2009, se delimitan los campos profesionales de formación, uno de ellos matemática educativa. 2) Que es en la etapa de Formación Básica (FB) y en la Profesional (FP), donde se ubican dos Unidades de Aprendizaje (UAp) que se articulan a tópicos de geometría euclidiana: Elementos de Geometría e Historia de las Matemáticas. La primera, es de carácter obligatoria y corresponde a la etapa de FB, la segunda es optativa y corresponde a la etapa de FP. En la primera UAp, la prueba se aborda en temas de: congruencia y semejanza, cuadriláteros cíclicos, y puntos y rectas notables en el triángulo. En la segunda, se articula al tópico: Problemas clásicos de la antigüedad, que refieren a la prueba en geometría. 3) En lo que compete a los libros usados como texto, se sugieren:

1. Bell, E. T. (1992). *Historia de las Matemáticas*. Limusa.
2. Boyer, C. B. (1986). *Historia de las matemáticas*. Alianza Universidad Textos, Madrid.
3. Ríbnikov, K. (1987). *Historia de la Matemática*. Editorial Mir.
4. Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Siglo XXI, Madrid.
5. Wussing, H. y Arnold, W. (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. PUZ, Zaragoza.
6. Isaacs, M. (2002). *Geometría universitaria*, Thomson Learning
7. Coxeter, H. y Greitzer, S. (1994). *Retorno a la geometría*.
8. Howard, E. (1985). *Estudio de las geometrías*, LIMUSA.
9. Gúsiev, V., Litvienko, V. y Mordkóvich, A. (1989). *Prácticas para resolver problemas matemáticos*, Geometría, MIR-Moscú.

Por lo que refiere al profesor titular del grupo académico (aspecto administrativo), se le hizo una solicitud formal, en la que se le dio a conocer el objetivo y el período en que se tomarían los datos, a fin de acordar los horarios de trabajo con sus estudiantes. Así también, que uno de los investigadores del grupo de investigación asumiría el rol de profesor-investigador por lo que su participación sería nula.

A los tres FPM se les informó del objetivo, período de trabajo, los medios a utilizar en la toma de datos, así como de la confidencialidad de sus datos personales. Es así que, de manera voluntaria, aceptaron colaborar con el grupo de investigación.

Al finalizar cada una de las seis sesiones que formaban el Módulo de Enseñanza, se constataba que los tres FPM participaron en las actividades desarrolladas durante cada sesión.

3.2 Módulo de Enseñanza: Interpretación de procesos de prueba en geometría

Se diseñó un Módulo de Enseñanza (ME) para que los FPM aprendieran a mirar profesionalmente el razonamiento de los estudiantes en problemas de probar en geometría utilizando el Modelo del Razonamiento Configural. El objetivo del ME fue que el FPM desarrollara la competencia docente “mirada profesional” en el contexto de la prueba en geometría.

El diseño consideró las acciones cognitivas relevantes para favorecer la mirada profesional desde la perspectiva de Jacobs, Lamb y Philipp (2010) en relación con el contexto de la prueba en geometría.

1. Identificar los elementos matemáticos claves para resolver la tarea. El FPM debe “mirar” qué elementos geométricos identifica un estudiante y si hay evidencias de que los comprende o no.
2. Interpretar el razonamiento que evidencian los estudiantes a través de su resolución. El FPM valora en qué medida los elementos geométricos identificados fueron clave para la resolución del estudiante, para ello, utiliza el Modelo del Razonamiento Configural.
3. Tomar decisiones. El FPM toma decisiones que favorezcan la progresión del aprendizaje del estudiante sobre la prueba en geometría en relación con su razonamiento.

Llinares (2012) reconoce que la movilización de las acciones cognitivas es fundamental para que un sujeto, en este caso un FPM, aprenda a mirar con sentido el razonamiento matemático de los estudiantes. Destaca tres aspectos que intervienen en el proceso, los cuales fueron incorporados en el diseño del ME:

1. Discusiones orientadas y/o orquestadas por el formador.
2. Espacio social que facilite la interacción entre los FPM.
3. Conocimiento para la enseñanza y el desarrollo de la competencia docente. En esta investigación, Modelo del Razonamiento Configural.

Se coincide con Lin (2005, citado en Llinares, 2012) quien sostiene que las discusiones orientadas y/o orquestadas por el formador alrededor de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, ayudan a que los FPM centren su atención de manera progresiva sobre diferentes aspectos de la enseñanza que pueden proporcionar información sobre lo que sucede y por qué sucede. Asimismo, que el proceso de construcción del conocimiento únicamente tiene significación en el contexto e interacción conjunta al resolver problemas profesionales (Llinares, 2012) y que el conocimiento en Educación Matemática es pertinente para la resolución de las tareas de planificar la enseñanza e interpretar las producciones matemáticas de los estudiantes, según lo señalado en Herbst y Chazan (2003, citado en Llinares 2012).

3.2.1 Momentos del Módulo de Enseñanza

El ME se constituyó de tres momentos, M1: Diagnóstico, M2: Enseñanza-Aprendizaje del Modelo del Razonamiento Configural y M3: Empleo del Modelo del Razonamiento Configural en tareas profesionales.

M1: Diagnóstico

Descripción: Consistió en una evaluación inicial (Ver Anexo 1) a los FPM de su conocimiento sobre conceptos y propiedades geométricas y su uso para la solución a dos problemas de probar en geometría. Se desarrolló en dos etapas, una primera individual de resolución y una grupal de puesta en común y discusión.

Objetivos: Dos objetivos comprenden este momento: O1) asegurar el nivel de partida de los FPM, sobre conceptos y propiedades básicas de geometría, y de su habilidad para resolver problemas de probar en geometría a fin de que estuviesen en condiciones de intervenir en los problemas de probar y O2) Familiarización con la población de estudio. En caso de que los FPM no dispusieran de conocimientos previos básicos, se retroalimentaría el proceso y/ o se modificarían las actividades del ME.

Instrumentos y técnicas: Se diseñó una prueba diagnóstica considerando conceptos y propiedades geométricas que fueron de utilidad para los FPM en la resolución de unos problemas de probar en geometría (Véase momento 2). También, se incorporaron dos problemas de probar que demandó a los estudiantes, identificar configuraciones y subconfiguraciones, así como reconocer modificaciones en las mismas y el empleo de distintos conceptos y propiedades geométricas.

Los datos se recabaron mediante las producciones escritas de los FPM y de entrevistas con preguntas semiestructuradas (Hernández, Fernández y Baptista, 2014) las cuales fueron grabadas con audio y video.

M2: Enseñanza-Aprendizaje del Modelo del Razonamiento Configural

Descripción: En el segundo momento, el profesor-investigador introdujo el Modelo del Razonamiento Configural a los FPM. Consistió de dos momentos: 1) Análisis de las soluciones que dieron a los problemas de probar en la prueba diagnóstica y 2) Análisis de un documento teórico (Véase Anexo 2). Posteriormente, los FPM resolvieron problemas de probar y analizaron sus propias soluciones usando el Modelo del Razonamiento Configural.

Objetivos: Este momento tuvo dos objetivos para los FPM: O1) identificar elementos claves al resolver problemas de probar y O2) interpretar soluciones a problemas de probar mediante el Modelo del Razonamiento Configural.

Instrumentos y técnicas: Se elaboró un documento teórico sobre el significado de la prueba en geometría y los elementos teóricos del Modelo del Razonamiento Configural.

Aspectos centrales del documento teórico:

- Definición del concepto de prueba, prueba en matemáticas y descripción de su relevancia en educación matemática considerando las orientaciones curriculares internacionales y nacionales.

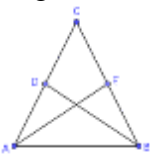
- Modelo del Razonamiento Configural. En qué consiste y los elementos que lo constituyen. Se incluyeron dos ejemplos de cómo se utiliza el Modelo para interpretar soluciones a problemas de probar.

Respecto a los problemas de probar que resolvieron los FPM, se incorporaron cuatro problemas clásicos de probar en Geometría² (Ver Anexo 3 y Anexo 4), utilizados en investigaciones previas que se sustentan del Modelo del Razonamiento Configural. Se eligieron, porque en su solución, se involucran configuraciones, subconfiguraciones y conceptos elementales y propiedades específicas en geometría. Los problemas se organizaron de forma gradual, tal que su solución:

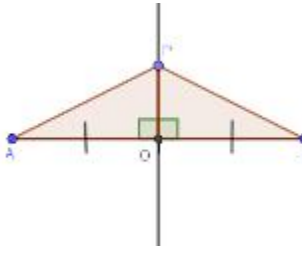

- Involucra la coordinación entre el reconocimiento de configuraciones y subconfiguraciones y el uso de conceptos básicos (Problema 1).
- Demanda tanto una coordinación entre el reconocimiento de configuraciones y subconfiguraciones y el uso de conceptos básicos, como una coordinación entre la modificación de subconfiguraciones y propiedades específicas (Problema 2).
- Involucra el planteamiento y prueba de hasta dos conjeturas (Problema 3 y 4).

En la Tabla 5 se muestran los problemas de probar seleccionados, así como un análisis de sus características en términos del Modelo del Razonamiento Configural.

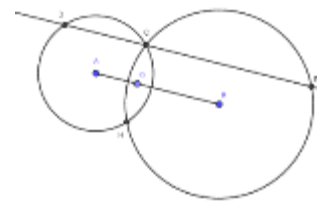
Tabla 5
Problemas clásicos de probar en Geometría para el momento dos

Problema de probar	Aprehensión operativa	Aprehensión discursiva	Proceso configural
<p><i>Problema 1.</i> En la figura siguiente $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ y $\angle CAE \equiv \angle CBD$. Probar que los triángulos $\triangle ACE$ y $\triangle BCD$ son congruentes</p> 	<p>Se reconoce una configuración geométrica compuesta por los triángulos $\triangle ACB$, $\triangle ACE$ y $\triangle BCD$</p> <p>Se reconocen como subconfiguraciones los triángulos $\triangle ACE$ y $\triangle BCD$</p>	<p>Concepto de triángulo isósceles: “$\overline{AC} \equiv \overline{BC}$”</p> <p>Congruencia de triángulos: “$\triangle ACE$ y $\triangle BCD$ son congruentes por el criterio <i>ALA</i>”</p>	<p>La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva propicia identificar una subconfiguración útil que sugiere la solución del problema de probar.</p>
<p><i>Problema 2.</i> Dado un segmento</p>	<p>Se construye una configuración</p>	<p>Definición de segmento: “Dado un segmento cualquiera...”</p>	<p>La coordinación aprehensión operativa/aprehensión</p>

² Problemas clásicos de probar en geometría. Se caracterizan como aquellos que “su resolución se apoya en la capacidad de coordinar el conocimiento geométrico, para realizar conjeturas que desemboquen en la solución del problema” (Torregrosa, 2017, p. 5).

<p>cualquiera \overline{AB}. Demuestra que si P es un punto de la recta perpendicular a \overline{AB} en su punto medio entonces $d(P, A) = d(P, B)$.</p>	<p>geométrica compuesta por un segmento de recta \overline{AB}, una recta perpendicular a este que pasa por el punto medio de dicho segmento.</p> <p>Se construye una subconfiguración compuesta por dos triángulos respecto a la configuración inicial.</p>	<p>Definición de recta perpendicular: <i>"...recta perpendicular a \overline{AB}"</i></p> <p>Definición de punto medio: <i>"en su punto medio entonces..."</i></p> <p>Concepto de triángulo: <i>"Se construyen los triángulos APO y BPO"</i></p> <p>Punto medio: <i>"$\overline{AO} = \overline{OB}$ por ser O el punto medio de \overline{AB}"</i></p> <p>Criterio de congruencia LAL: <i>"Luego $APO \cong BPO$ por el criterio LAL"</i></p> <p>Definición de congruencia: <i>"$\overline{AP} = \overline{BP}$ por definición de congruencia..."</i></p>	<p>discursiva propicia construir una subconfiguración útil que sugiere la solución del problema de probar:</p> 
<p><i>Problema 3.</i> En el triángulo de la figura D es el Incentro y \overline{EF} es paralelo a \overline{AB}. Prueba que $\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{BF}$</p> 	<p>Se identifica una subconfiguración geométrica compuesta por el triángulo ΔACB, el Incentro D y segmentos paralelos \overline{EF} y \overline{AB}.</p> <p>Se construye una subconfiguración mediante trazos auxiliares de rectas perpendiculares.</p> <p>Se identifican elementos de una subconfiguración: bisectrices, triángulos y</p>	<p>La longitud de un segmento suma es igual a la suma de las longitudes de los segmentos que lo forman: <i>"$\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{DF}$... así para resolver el problema se debe probar que $\overline{ED} = \overline{AE}$..."</i></p> <p>Los ángulos alternos internos tienen la misma medida al estar entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal: <i>"$\sphericalangle EDA = \sphericalangle DAB$... por ser ángulos alternos internos en dos rectas paralelas cortadas por una transversal"</i></p> <p>Incentro y bisectrices: <i>"\overline{AD} y \overline{BD} son bisectrices, por definición de Incentro"</i></p> <p>Concepto de congruencia:</p>	<p>La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva propicia plantear una conjetura que replantea el problema de probar:</p> <p><i>"Equivalencia de segmentos: $\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{DF}$ porque la longitud de un segmento suma es igual a la suma de las longitudes de los segmentos que lo forman. Así, para resolver el problema se debe probar que $\overline{ED} = \overline{AE}$; $\overline{DF} = \overline{BF}$"</i></p>

	segmentos de los triángulos.	<p>“...por criterio de semejanza AAA y razón de 1”</p> <p>Axioma de transitividad: “Sustituyendo $\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{DF} = \overline{AE} + \overline{BF} \therefore$ $\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{BF}$”</p>	
<i>Problema 4.</i>	<p>Sean dos circunferencias de centros A y B respectivamente, secantes en dos puntos distintos C y H. Por C se traza una paralela al segmento AB, que corta a las circunferencias en los puntos D y E. Prueba que \overline{DE} es dos veces \overline{AB}</p>	<p>Definición de circunferencias y concepto de posición: “Sean dos circunferencias...secantes en dos puntos...”</p> <p>Definición de rectas paralelas: “se traza una paralela...”</p> <p>Concepto de puntos de intersección: “que corta...en los puntos...”</p> <p>La longitud de un segmento suma es igual a la suma de las longitudes de los segmentos que lo forman: “Se reescribirá \overline{DE} en términos de \overline{AB} descomponiendo los segmentos...”</p> <p>Propiedad de rectas perpendiculares en circunferencias secantes: “\overline{CH} es perpendicular a \overline{AB} porque la recta que pasa por los puntos de tangencia de dos circunferencias, es perpendicular al segmento de recta que pasa por los centros de ambas circunferencias”</p> <p>Concepto de rectas paralelas: “entonces $\overline{AO} = \overline{A'C}$...por definición de paralelismo”</p>	<p>La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva propicia plantear una conjetura que replantea el problema de probar:</p> <p><i>Equivalencia de segmentos y proporcionalidad:</i> Se reescribirá \overline{DE} en términos de \overline{AB} descomponiendo los segmentos. La longitud de un segmento suma es igual a la suma de las longitudes de los segmentos que lo forman. Así, $\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE}$ y se debe encontrar la relación entre \overline{DC} y \overline{AO} y entre \overline{CE} con \overline{OB}.</p>



La longitud de un segmento suma es igual a la suma de las longitudes de los segmentos que lo forman:

“De esta forma se podría reescribir \overline{DE} en términos de \overline{AB} ”

Radios de una circunferencia

“ $\overline{AC} = \overline{AD}$ por ser radios de una misma circunferencia”

Propiedad: En un mismo triángulo a lados congruentes corresponden ángulos congruentes

“ $\sphericalangle A'DA = \sphericalangle A'CA$ porque es un mismo triángulo (ADC) a lados congruentes corresponden ángulos congruentes”

Concepto de perpendicularidad:

“ $\sphericalangle AA'D$ y $\sphericalangle AA'C$ son ángulos rectos, por definición de perpendicularidad”

Propiedad de la suma de los ángulos internos en un triángulo:

“...el 3ero. Debe ser igual, para conservarse que $\sphericalangle AA'D + \sphericalangle A'DA + \sphericalangle A'AD = 180^\circ$...”

Criterio de congruencia (LAL):

“ $\triangle AA'D \cong \triangle AA'C$ por el criterio de congruencia LAL”

Propiedad de transitividad:

“ $\overline{AO} = \overline{A'C} \rightarrow \overline{DA'} = \overline{AO}$ por transitividad”

La longitud de un segmento suma es igual a la suma de las longitudes

de los segmentos que lo forman:

$$"DC = DA' + A'C \dots"$$

Los datos se recabaron mediante las producciones escritas de los FPM, así como con entrevistas con preguntas semiestructuradas (Hernández, Fernández y Baptista, 2014) las cuales fueron grabadas con audio y video.

M3: Empleo del Modelo del Razonamiento Configural en tareas profesionales

Descripción: En este momento del ME, los FPM resolvieron tareas profesionales (Ver Anexo 4) que requirieron del uso Modelo del Razonamiento Configural, para interpretar las soluciones dadas por estudiantes de secundaria, a dos problemas de probar.

Objetivos: Este momento tuvo dos objetivos para los FPM: O1) interpretar soluciones de estudiantes a problemas de probar mediante el Modelo del Razonamiento Configural O2) tomar decisiones argumentadas para la progresión de los estudiantes en su razonamiento al resolver problemas de probar en geometría.

Instrumentos: Se diseñaron dos tareas profesionales³ para las cuales se seleccionaron respuestas de estudiantes de secundaria a dos de los problemas de probar de los momentos anteriores. Se consideraron que en sus resoluciones estuvieran involucradas diferentes organizaciones de las configuraciones geométricas, propiedades y definiciones, así como la coordinación entre éstas.

Primeramente, se demandó a los FPM analizar un proceso de prueba erróneo, interpretar el razonamiento de un estudiante y decidir cómo intervenir para favorecer su progresión en la solución a un problema de probar. Posteriormente, los FPM analizaron procesos de prueba incompletos de dos estudiantes, interpretaron y contrastaron ambos razonamientos y con base en ello, debían diseñar una secuencia de tareas para guiar su resolución dependiendo del razonamiento manifestado.

Los datos se recabaron mediante las producciones escritas de los FPM, así como con entrevistas con preguntas semiestructuradas (Hernández, Fernández y Baptista, 2014) las cuales fueron grabadas con audio y video.

3.3 Implementación del ME

3.3.1 Organización de las sesiones

El ME se desarrolló en seis sesiones con una duración de dos horas cada una. Se organizaron con base en los objetivos de cada momento, la programación de las sesiones, las formas de resolución por los participantes y las formas de intervención por los participantes y por el grupo de investigación durante la toma de datos.

³ Tareas profesionales. Son tareas “como el análisis de situaciones de enseñanza específicas proporcionan apoyo para la construcción personal del conocimiento” (Borko, Jacobs, Eiteljorg y Pittma, 2006 en Llinares, 2012, p. 55).

3.3.2 Planificación de las sesiones

El ME se desarrolló en las instalaciones de la Universidad Autónoma de Guerrero en el ciclo escolar 2019-2020 en cuatro semanas entre febrero y marzo de 2020, con un total de seis sesiones. Cada sesión se realizó en un día diferente de la semana, en el horario escolar del grupo de 8vo semestre, con una duración de 2 horas cada una.

En las primeras dos semanas se realizaron dos sesiones por cada grupo, comenzando por la última semana del mes de febrero en tanto que, en la tercera y cuarta semana, se realizó una sesión por cada grupo. Lo anterior se decidió a fin de favorecer la continuidad en el aprendizaje y para disponer de un tiempo suficiente para conocer las respuestas de los FPM y con base en ello, tomar decisiones para las subsecuentes intervenciones en el aula.

Las tareas, fechas de desarrollo en el salón de clases y actividades, se describen en la Tabla 6.

Tabla 6

Planificación de las sesiones del módulo de enseñanza

Momento	Sesión	Fecha	No. Alumnos asistentes	Actividad	Intervención	Tiempo máximo
M1	1	24/02/20	3	Evaluación diagnóstica: Definición de conceptos geométricos y resolución de dos problemas de probar.	Trabajo individual -Comprensión del enunciado -Proceso de solución -Entrevistas posterior a la solución	120 min -20 min -60 min -40 min
	2	26/02/20	3	Revisión de la evaluación diagnóstica: Revisión de las soluciones a los problemas de probar.	Trabajo grupal -Comparación de soluciones -Presentación y discusión en grupo de las soluciones -Lectura y análisis sobre el Modelo del Razonamiento Configural	120 min -40 min -40 min -40 min
M2	3	04/03/20	3	Resolución del problema de probar 1 y revisión de su solución: Resolución del problema de probar cuya solución involucra la coordinación entre el reconocimiento de configuraciones y subconfiguraciones y el uso de conceptos básicos.	Trabajo en equipos de 2 integrantes -Comprensión del enunciado del problema -Proceso de solución -Identificación de elementos clave en su resolución	40 min -5 min -10 min -10 min

			<p>Revisión de la solución al problema de probar 1.</p>	<p>-Interpretación de la resolución con base en el Modelo del Razonamiento Configural</p> <p>Trabajo individual</p> <p>-Entrevistas posterior a la solución</p> <p>Trabajo grupal</p> <p>-Presentación y discusión de la resolución e interpretación</p>	<p>-15 min</p> <p>20 min</p> <p>-20 min</p> <p>20 min</p> <p>-20 min</p>
			<p>Resolución del problema de probar 2:</p> <p>Inicio de la resolución del problema de probar cuya solución demanda tanto una coordinación entre el reconocimiento configuraciones y subconfiguración y el uso de conceptos básicos, como una coordinación entre la modificación de subconfiguraciones y propiedades específicas.</p>	<p>Trabajo en equipo de 2 integrantes</p> <p>-Comprensión del enunciado del problema</p> <p>-Proceso de solución</p> <p>-Identificación de elementos clave en su resolución</p> <p>-Interpretación de la resolución con base en el Modelo del Razonamiento Configural</p>	<p>40 min</p> <p>-10 min</p> <p>-10 min</p> <p>-10 min</p> <p>-10 min</p>

4	05/03/20	3	<p>Resolución del problema de probar 2 y revisión de su solución:</p> <p>Conclusión de la resolución del problema de probar 2. Revisión de su resolución.</p> <p>Resolución del Problema de probar 3:</p> <p>Resolución del problema de probar cuya solución involucra el planteamiento y prueba de hasta dos conjeturas. Revisión de la solución al problema de probar 3.</p>	<p>Trabajo en equipos de 2 integrantes</p> <p>-Fin de la resolución del problema de probar 2</p> <p>Trabajo individual</p> <p>-Entrevistas posterior a la resolución</p> <p>Trabajo grupal</p> <p>-Presentación y discusión de la resolución e interpretación</p> <p>Trabajo individual</p> <p>-Comprensión del enunciado del problema</p> <p>-Proceso de solución</p> <p>-Identificación de elementos clave en su resolución</p> <p>-Interpretación de la resolución con base en el Modelo del Razonamiento Configural</p> <p>-Entrevistas posterior a la solución</p> <p>Trabajo grupal</p> <p>-Presentación y discusión de la resolución e interpretación</p>	<p>10 min</p> <p>-10 min</p> <p>20 min</p> <p>-20 min</p> <p>15 min</p> <p>-15 min</p> <p>60 min</p> <p>-10 min</p> <p>-10 min</p> <p>-10 min</p> <p>-15 min</p> <p>-15 min</p> <p>15 min</p> <p>-15 min</p>
---	----------	---	--	---	---

M2	5	12/03/20	3	<p>Resolución del Problema de probar 4:</p> <p>Resolución del problema de probar cuya solución involucra el planteamiento y prueba de hasta dos conjeturas. Revisión de la solución al problema de probar 4.</p>	<p>Trabajo individual</p> <ul style="list-style-type: none"> -Comprensión del enunciado del problema -10 min -Proceso de solución -15 min -Identificación de elementos clave en su resolución -10 min -Interpretación de la solución con base en el Modelo del Razonamiento Configural -15 min -Entrevistas posterior a la solución -30 min 	<p>80 min</p>
	M3	6	17/03/20	3	<p>Resolución de tareas profesionales:</p> <p>Inicio de la resolución de las tareas profesionales que involucran el análisis de situaciones de enseñanza de la prueba en geometría.</p>	<p>Trabajo individual</p> <ul style="list-style-type: none"> -Comprensión de una situación de aprendizaje -10 min -Identificación de elementos clave e interpretación del razonamiento -10 min -Toma de decisión sobre la intervención en un diálogo alumno-profesor -20 min
	6	17/03/20	3	<p>Resolución de tareas profesionales:</p> <p>Conclusión de la resolución de las tareas profesionales.</p>	<p>Trabajo individual</p> <ul style="list-style-type: none"> -Comprensión de una situación de aprendizaje -15 min -Identificación de elementos clave e interpretación del razonamiento -30 min 	<p>120 min</p>

						-Diseño de secuencia de tareas para la progresión en la resolución de un problema de probar -Entrevistas -Conclusión sobre el Modelo del Razonamiento Configural	-50 min -15 min -10 min
--	--	--	--	--	--	--	-------------------------------

3.3.3 Organización de la actividad en el salón de clases

En las intervenciones en el salón de clases, por tanto, en la recogida de datos, participaron tres investigadoras, una en rol de docente-investigador, otra a cargo tanto de grabaciones de video y audio durante el primer momento del ME como de apoyo en la realización de las entrevistas y la otra investigadora, realizó algunas entrevistas durante los tres momentos del ME. Por cuanto a la participación que tuvo el profesor responsable del grupo académico con los que se realizó la investigación, fue nula.

Al inicio de cada sesión, el docente-investigador realizó las acciones siguientes, en ese orden:

1. Presentó el objetivo de la sesión.
2. Introdujo los problemas de probar o tareas profesionales que los FPM debían resolver.
3. Situó a los FPM a analizar lo que le demandaba cada problema de probar o tarea profesional.

Durante el trabajo individual, las acciones del docente-investigador se limitaron a observar el trabajo de los estudiantes. Los investigadores le dieron seguimiento puntual a la actividad de los FPM durante las entrevistas, planteando preguntas sobre la forma de proceder con el propósito de comprender lo que hicieron y porqué lo hicieron, así como de las interpretaciones que realizaban sobre sus soluciones utilizando el Modelo del Razonamiento Configural. En este sentido, los investigadores se apoyaron de preguntas como las siguientes: ¿qué fue lo primero que realizaste en la actividad? ¿qué aspectos fueron clave en tu resolución? ¿qué interpretas por aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural?

De igual forma, la intervención del profesor-investigador consistió en guiar el aprendizaje de los FPM sobre el empleo del Modelo del Razonamiento Configural, así como favorecer que comunicaran, de la mejor manera posible, sus respuestas escritas y orales en cada problema o tarea. Con base en todo lo anterior, el profesor-investigador reconocía las formas de razonar de los FPM, así como sus interpretaciones. Esto fue fundamental para decidir las respuestas a presentar ante el grupo.

La respuesta seleccionada por el docente-investigador era presentada ante el grupo y a partir de ella se detonaba la discusión grupal sobre el proceso de resolución de cada problema o tarea y el análisis del razonamiento involucrado, utilizando el Modelo del Razonamiento Configural. Durante la discusión, los FPM compararon y validaron sus formas de proceder, así como, sus interpretaciones.

Lo antes descrito, permitió reconocer el desarrollo de la mirada profesional en FPM en relación con la progresión en su aprendizaje sobre el empleo del Modelo del Razonamiento Configural. Se consideró que el aprendizaje de los FPM, fue consecuente de la retroalimentación entre los tres FPM participantes y el docente-investigador, sobre su uso para analizar los razonamientos evidenciados al resolver problemas de probar en geometría.

3.4 Método de análisis de datos

El análisis de los datos tomó como base las producciones escritas de los FPM al resolver los problemas de probar en geometría y las tareas profesionales, así como en las grabaciones de audio y/o video las cuales son el resultado de las entrevistas. En el momento de las entrevistas fue cuando se profundizó sobre los razonamientos que siguieron los FPM al resolver los problemas de probar y las tareas profesionales, así como las interpretaciones que realizaron sobre sus procesos de solución.

Las entrevistas fueron de tipo semiestructuradas, realizadas en la etapa de trabajo individual, una vez que los FPM concluían cada problema o tarea. Se utilizó en ese proceso, una cámara de video y/o audio. Con la cámara, fue posible enfocar la lente hacia el problema o tarea y las manos de los FPM. Los espacios físicos en que se llevaron a cabo, fueron, una sala de usos múltiples y un salón de clases.

Para el estudio de la mirada profesional en FPM a partir de su conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural, se consideró que el conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural se evidencia en los FPM en tanto a que se utiliza para identificar los elementos relevantes del proceso de prueba, interpretar tal proceso y con base en ello, tomar decisiones para la progresión en la comprensión sobre la prueba en geometría.

De esta forma, las destrezas de la competencia docente mirada profesional se reescriben como sigue:

1. Identificar como elementos relevantes del proceso de prueba los conceptos, propiedades y definiciones y las manipulaciones sobre la configuración o subconfiguración.
2. Interpretar los procesos de prueba en geometría en términos de las coordinaciones entre las aprehensiones operativas y discursivas.
3. Tomar decisiones fundamentadas para la mejora de los procesos de prueba en geometría.

En particular, se centró la atención en analizar y comprender dos aspectos principales.

1. *Conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural en FPM:*
 - Elementos que identifican como relevantes al resolver problemas de probar en geometría.
 - La manera en que interpretan los elementos relevantes en sus resoluciones a problemas de probar en geometría.
 - La manera en que emplean los conceptos del Modelo del Razonamiento Configural en sus interpretaciones.
2. *Toma de decisiones de FPM sobre la comprensión de estudiantes*
 - Cómo interpretan y explican procesos de solución de estudiantes.
 - Cómo toman decisiones en situaciones de aprendizaje de la prueba en geometría de estudiantes para la progresión en su aprendizaje.

Respecto al conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural, se realizaron entrevistas a fin de comprender el razonamiento que siguieron los FPM al resolver los problemas de probar y sus interpretaciones sobre las mismas y, se establecieron categorías

para analizar la destreza de identificar y de interpretar que se muestran en la Tabla 7 y Tabla 8, respectivamente.

Tabla 7
Categorías de análisis para la destreza de identificar

Nivel	Descripción
1	Identifica solamente elementos relacionados con las aprehensiones operativas (modificaciones sobre la configuración) o con las aprehensiones discursivas (asociación de conceptos y propiedades geométricas) como aspectos clave en su proceso de solución.
2	Identifica algunos elementos relacionados con las aprehensiones operativas y con las aprehensiones discursivas como aspectos clave en su proceso de solución.
3	Identifica todos los elementos relacionados con las aprehensiones operativas y con las aprehensiones discursivas como aspectos clave en su proceso de solución.

Identificar: Se evidencia al seleccionar fragmentos de las resoluciones que muestren aspectos que refieran a las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas como aspectos claves en su proceso de solución.

Tabla 8
Categorías de análisis para la destreza de interpretar

Nivel	Descripción
1	Interpreta teóricamente solamente las aprehensiones operativas o las aprehensiones discursivas en el fragmento identificado. No interpreta teóricamente los procesos configurales y su papel en la resolución.
2	Interpreta teóricamente algunas de las aprehensiones operativas y algunas de las aprehensiones discursivas en el fragmento identificado. No interpreta teóricamente los procesos configurales y su papel en la resolución.
3	Interpreta teóricamente algunas de las aprehensiones operativas y algunas de las aprehensiones discursivas en el fragmento identificado. Interpreta algunos de los procesos configurales.
4	Interpreta teóricamente todas las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas en el fragmento identificado. Interpreta algunos de los procesos configurales y destaca su papel en la resolución del problema de probar en geometría.
5	Interpreta teóricamente todas las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas en el fragmento identificado. Interpreta teóricamente, la coordinación entre las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas como procesos configurales y reconoce su papel en la resolución del problema de probar en geometría, en el fragmento identificado.

Interpretar: Se evidencia al reconocer el papel de la coordinación en la resolución de los problemas de probar. Exige la interpretación fundamentada sobre la solución usando las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas.

A fin de comprender el razonamiento que siguieron los FPM al resolver las tareas profesionales, se realizaron entrevistas. De igual forma, se establecieron categorías para analizar la destreza de tomar decisiones las cuales se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9
Categorías de análisis para la destreza de toma de decisiones

Nivel	Descripción
1	Propone tareas que guíen la resolución del problema de probar justificadas con base en solamente las aprehensiones operativas o las aprehensiones discursivas.
2	Propone tareas que guíen la resolución del problema de probar con base en las aprehensiones discursivas y las aprehensiones operativas.
3	Propone tareas que guíen la resolución del problema de probar con base en la coordinación entre las aprehensiones discursivas y las aprehensiones operativas (proceso configurales).

Tomar decisiones fundamentadas: Se evidencia al proponer intervenciones o secuencias de tareas que guíen los procesos de prueba fundamentadas en la interpretación de los mismos.

Por último, la forma en la que se organizó el análisis de los datos fue:

1. Análisis por expertos de los procesos de solución a los problemas de probar.
El grupo de investigación de este estudio, analizó las formas de proceder de los FPM en los problemas de probar usando el Modelo del Razonamiento Configural a fin de identificar los elementos claves en sus resoluciones e interpretar sus razonamientos.
2. Descripción del análisis realizado por FPM a sus resoluciones a los problemas de probar.
Analizamos los elementos que identifican los FPM como esenciales en su resolución, así como las interpretaciones teóricas que realizaron utilizando el Modelo del Razonamiento Configural.
3. Contraste entre 1 y 2.
Reconocimos diferencias y similitudes en el análisis de las resoluciones a los problemas de probar por parte de los expertos y de los FPM a partir de ello se concluye sobre los niveles en las categorías de identificar y de interpretar.
4. Descripción del proceso de toma de decisiones de los FPM en situaciones de enseñanza de la prueba en geometría.
Se reconoce qué aspectos consideran los FPM para entender la forma de proceder de estudiantes al resolver problemas de probar en geometría y cómo los utilizan, para

tomar decisiones que orienten la progresión en el aprendizaje de la prueba. A partir de ello se concluye respecto a la categoría de análisis de toma de decisiones.

5. Descripción de la competencia docente mirar el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría en FPM, a través del conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural como herramienta conceptual. Para ello se retoman las conclusiones de 3 y 4 en relación con las destrezas de identificar, interpretar y tomar decisiones.

Se centra especial atención en el conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural en relación con el desarrollo de la competencia docente mirada profesional (identificar, interpretar y tomar decisiones) más allá de si las soluciones a los problemas de probar o tareas profesionales que proporcionaron los FPM, eran correctas o incorrectas. A fin de organizar la información, las respuestas de los FPM a los problemas de probar de geometría y las tareas profesionales, las unidades del caso de estudio fueron codificadas como FPM1, FPM2 y FPM3.

4. Resultados

Con base en la implementación del Módulo de Enseñanza, se reporta el análisis del desarrollo de la competencia docente mirar el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría en FPM a partir de su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural. Para ello nos apoyamos de las tres destrezas de la competencia docente mirada profesional: identificar, interpretar y tomar decisiones. Las dos primeras, se utilizaron para analizar el conocimiento que evidenciaron los FPM sobre el Modelo del Razonamiento Configural, como resultado de la revisión que hicieron de sus soluciones a los problemas de probar en geometría. La última, se consideró para analizar las decisiones que los FPM tomaron como resultado de sus interpretaciones a las respuestas que dieron estudiantes de secundaria a problemas de probar.

De esta forma, el análisis de los datos se organizó en dos secciones:

1. Conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural en FPM.
2. Toma de decisiones de FPM sobre la comprensión de estudiantes.

Se reconocieron dos formas de razonar sobre el empleo del Modelo del Razonamiento Configural para identificar, interpretar y tomar decisiones en el contexto de la prueba en geometría. La primera, refiere al razonamiento evidenciado por FPM1 en tanto que la segunda, refiere a FPM2 y FPM3.

A fin de comunicar los hallazgos de la investigación, las respuestas de los FPM a los problemas de probar de geometría y las tareas profesionales fueron codificadas como FPM1 y FPM2. Tanto FPM2 como FPM3 mostraron formas similares de emplear al Modelo del Razonamiento Configural para identificar, interpretar y tomar decisiones en situaciones de aprendizaje de la prueba en geometría, por tanto, sus respuestas se presentan de forma indistinta.

4.1 Conocimiento sobre el Modelo el Razonamiento Configural en FPM

Como evidencia del conocimiento en FPM sobre el Modelo del Razonamiento Configural se analizó qué identifican como elementos relevantes en sus soluciones a los problemas de probar en geometría y cómo interpretan tales soluciones. Como elementos relevantes, los FPM debían reconocer las:

1. Aprehensiones discursivas: conceptos, propiedades y definiciones de geometría plana que asocian a una configuración geométrica.
2. Aprehensiones operativas: manipulaciones sobre la configuración o subconfiguración geométrica.

Respecto a las interpretaciones que los FPM realizaron sobre su solución a cada problema de probar en geometría, estos debían expresar teóricamente:

1. Las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas.

2. Los procesos configurales: coordinación entre aprehensiones operativas y aprehensiones discursivas.

Para evidenciar la adquisición de las destrezas de identificar e interpretar en los FPM en relación con su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural, se retoman las Categorías de análisis para la destreza de identificar (Véase Tabla 7) y las Categorías de análisis para la destreza de interpretar (Véase Tabla 8).

Estas categorías, se utilizaron posteriormente al análisis que realizamos como expertos de los procesos de solución de los FPM a los problemas de probar y, de la descripción del análisis que realizaron los FPM sobre sus propias resoluciones a los problemas de probar. Su uso nos permitió concluir sobre el conocimiento de los FPM del Modelo del Razonamiento Configural al resolver de manera gradual cada uno de los problemas de probar en geometría.

4.1.1. Problema de probar 1

El análisis de las producciones escritas y verbales de los FPM evidenciaron las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales que realizaron y que los llevaron a determinar una solución que satisfizo las exigencias del problema. Asimismo, de su interpretación al proceso de solución, en el que identificaron qué elementos fueron claves para resolver el problema. Ambos aspectos, interpretación e identificación, permitieron reconocer el conocimiento de los FPM sobre el Modelo del Razonamiento Configural.

Los FPM siguieron razonamientos similares durante la resolución al problema de probar, en el sentido de que realizaron las mismas aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales. Sin embargo, cada uno evidenció un conocimiento distinto sobre el Modelo del Razonamiento Configural, como se muestra a continuación.

4.1.1.a. Futuro Profesor de Matemáticas 1

Con base en el proceso de solución de FPM1 se reconoce el procedimiento siguiente:

1. Analizó la representación geométrica inicial en conjunto con la hipótesis y tesis del enunciado del problema de probar.
2. Identificó los elementos geométricos que serían clave en su solución. Para ello, relacionó los datos de la hipótesis del problema con dos de los tres triángulos que “componían” la figura geométrica inicial, los que le serían útil para su solución.
3. Identificó cada uno de los componentes de ambos triángulos: lados y ángulos.
4. Relacionó los componentes de ambos triángulos con la información conocida: dos ángulos homólogos congruentes y un lado homólogo congruente.
5. Reconoció que podía utilizar el criterio de congruencia de triángulos Ángulo-Lado-Ángulo y así demostrar que son congruentes, tesis a probar.

Lo que destaca en la solución de FPM1 en este problema, es que el visualizar con qué formas geométricas de la representación geométrica inicial trabajar (dos triángulos $\triangle ACE$ y $\triangle BCD$), así como sus elementos (ángulos: $\angle ACE, \angle CAE, \angle CBD$ y lados: $\overline{AC}, \overline{BC}$), lo llevó a

reconocer que es a través de uno de los criterios de congruencia de triángulos (criterio de congruencia *ALA*), que podría probar la tesis.

Una vez que se analizó la forma de proceder de FPM1 en el problema de probar, se procedió a comprender el razonamiento que siguió en cada una de sus acciones. Se utilizó para ello, a la aprehensión operativa, la aprehensión discursiva y el proceso configural, elementos del Modelo del Razonamiento Configural.

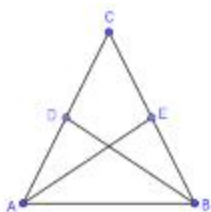
En la Tabla 10 se muestra el análisis de su proceso de solución al problema de probar con base en el Modelo del Razonamiento Configural. Incluye evidencia escrita y verbal.

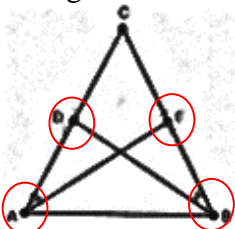
Tabla 10

Análisis del proceso de solución de FPM1 al problema de probar 1

Enunciado del problema: En la figura siguiente $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ y $\angle CAE \equiv \angle CBD$. Probar que los triángulos *ACE* y *BCD* son congruentes.

Configuración geométrica inicial:



Acción del resolutor	Aprehensión operativa	Aprehensión discursiva	Proceso configural
Asocia la hipótesis inicial con la configuración geométrica inicial.	Modifica la configuración geométrica inicial mediante marcas.	Concepto de segmentos rectos. Concepto de ángulos. Concepto de triángulos.	La coordinación aprehensión discursiva/aprehensión operativa conlleva a tener un referente visual del problema de probar que ayuda a delimitar una posible estrategia.
 <p><i>FPM1: Lo primero fue identificar los elementos que yo ya tenía... como verdadero por ejemplo, que el segmento \overline{AC} (señala en la figura) era igual a \overline{CB} eso por la parte de la hipótesis.</i></p>	<i>FPM1: En la representación lo que hice fue marcar esos elementos que ya teníamos, igualar los lados y los ángulos.</i>		
Modifica la configuración geométrica mediante su “descomposición” en dos triángulos.	Reconoce subconfiguraciones y sus elementos en la configuración	Concepto de triángulo. Concepto de ángulos y	La coordinación aprehensión operativa/aprehensión

	<p>geométrica inicial mediante su descomposición: Triángulos ΔACE y ΔBCD, los lados \overline{AE} y \overline{DB} y los ángulos $\angle CAE$, $\angle CBD$ y $\angle ACE$.</p>	<p>lados de un triángulo.</p>	<p>discursiva propicia tener una subconfiguración útil para la resolución del problema de probar.</p>
<p>Transcripción de la imagen: <i>ACE es \angle común a Δ's (ACE) y (BCD)</i></p> <p>Hipótesis: $\overline{FC} = \overline{EC}$ $\angle CAE = \angle CBD$ $\angle ACE$ común</p> <p>FPM1: <i>Lo que se me ocurrió después, fue ver si este lado (señala el segmento \overline{AE}) era igual con el de acá (señala el segmento \overline{DB}) para usar el criterio de congruencia.</i></p>	<p>Relaciona elementos de las subconfiguraciones geométricas.</p> <p>$\overline{AC} = \overline{BC}$ $\angle CAE = \angle CBD$ $\angle ACE$ común</p>	<p>Criterio de congruencia ALA.</p>	<p>La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva propicia probar que los triángulos ΔDBA, ΔEAB son congruentes.</p>
<p>Asocia los elementos de las subconfiguraciones geométricas con la propiedad de congruencia mediante el criterio de congruencia ALA.</p> <p>FPM1: <i>Me di cuenta que al ángulo de acá (señala el ángulo en C) era común en ambos triángulos (señala los triángulos ΔAEC y ΔBDC) ... como tenía que este ángulo era común...el ángulo $\angle ACB$ entonces, pues, ya...cumplen las condiciones para usar el criterio de congruencia ALA y de esa manera establecí que el triángulo de acá era congruente con el triángulo de acá (señala los triángulos ΔAEC y ΔBDC).</i></p>			

Del análisis de su proceso de solución, los elementos que *identificamos* como relevantes fueron:

- Conceptos y/o propiedades geométricas utilizadas: concepto de triángulo y sus elementos, congruencia de triángulos y criterios de congruencia.
- Modificaciones sobre la figura: reconocimiento de subconfiguraciones geométricas a partir de la configuración geométrica inicial.

Estos elementos fueron contrastados con aquellos que FPM1 identificó del análisis que realizó a su proceso de solución. Al ser cuestionado por el investigador sobre su respuesta al

inciso a) del problema, en el que se le demandó identificar elementos relevantes en su resolución, FPM1 identificó:

- Conceptos y/o propiedades geométricas utilizadas: criterio de congruencia.

FPM1: La principal fue el criterio de congruencia que podemos identificarla como una propiedad...prácticamente fue la única propiedad que utilicé.

- Modificaciones sobre la figura: reconocimiento de subconfiguraciones.

FPM1: Identificar a qué triángulo se refería...Entonces, yo...identifiqué un tercer triángulo.

Este contraste permitió reconocer que FPM1 identificó solo algunos de los conceptos y propiedades geométricas que utilizó en su proceso de solución, así como algunas de las modificaciones que llevó a cabo sobre la configuración geométrica inicial. El nivel que le corresponde respecto a la categoría de identificar es el 2, en razón de que en el análisis que realizó acerca de su forma de proceder para resolver el problema, a pesar de que los utilizó no identificó como aspectos claves:

- Reconocimiento de elementos del triángulo.
- Concepto de triángulo y sus elementos.

Siguiendo con la segunda categoría de análisis, *interpretar*, FPM1 evidenció una interpretación teórica poco profunda sobre su proceso de solución debido a que dejó al margen muchas de las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y, no interpretó teóricamente las relaciones entre las aprehensiones operativas y aprehensiones discursivas como procesos configurales.

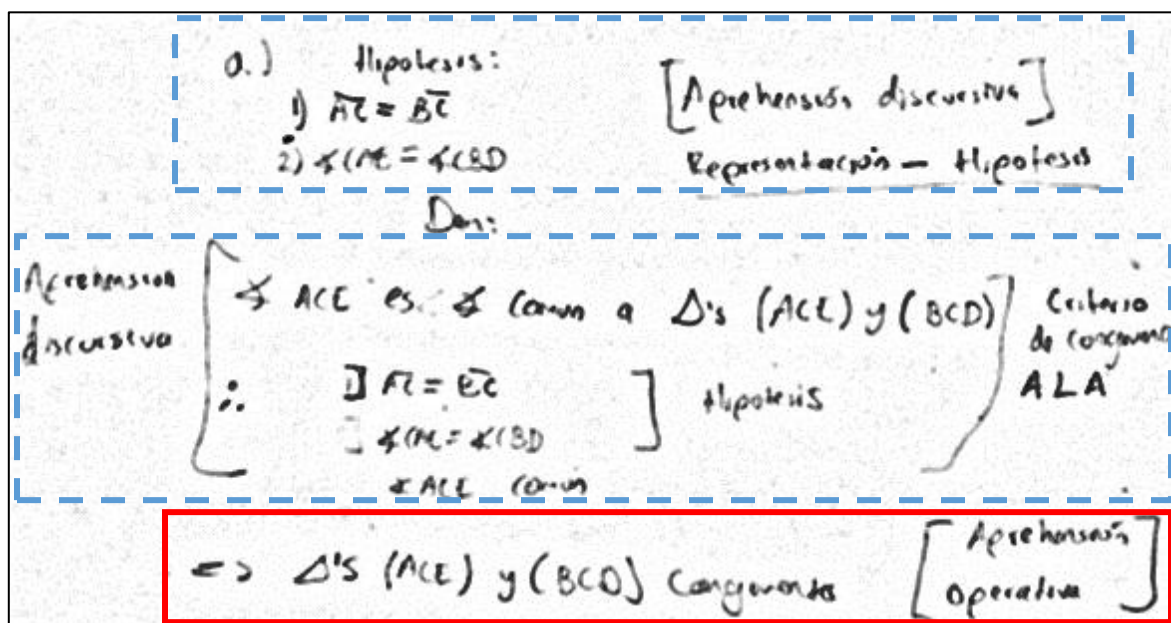


Figura 6. Interpretación de FPM1 sobre su proceso de solución al problema de probar 1.

El análisis sobre su proceso de solución (véase Tabla 10) fue contrastado con la interpretación que hizo sobre el mismo (Véase Figura 6), a fin de entender cómo interpretó teóricamente su

actuación con respecto a las aprehensiones operativas, las aprehensiones discursivas y los procesos configurales.

A partir de ello notamos que FPM1 interpretó como aprehensión discursiva la información proporcionada por la hipótesis del problema, igualdad de segmentos y de ángulos, así como el criterio de congruencia de triángulos Ángulo-Lado-Ángulo (ALA). De esta forma no consideró el concepto de triángulo y sus elementos. Respecto a su interpretación sobre la aprehensión operativa, únicamente señaló la prueba de la congruencia entre dos triángulos. No consideró las modificaciones sobre la configuración geométrica inicial mediante marcas que refieren a la información conocida por la hipótesis del problema, así como su “descomposición” en dos triángulos.

El investigador cuestionó a FPM1 sobre el inciso b) del problema de probar, a fin de profundizar en el entendimiento de su interpretación sobre su proceso de solución mediante los elementos del Modelo del Razonamiento Configural. Identificamos que FPM1 relacionó las aprehensiones operativas con “operaciones” que realizó sobre la figura geométrica y las aprehensiones discursivas con las “justificaciones” que empleó en su proceso de solución. Con base en ello, relacionó únicamente las aprehensiones operativas con las manipulaciones que realizó sobre las figuras geométricas y las aprehensiones discursivas con la información que utilizó para justificar su proceder (hipótesis del problema y conceptos geométricos).

De otra parte, reconocimos que FPM1 no interiorizó en qué consiste el proceso configural, debido a que, en la interpretación de su razonamiento en este problema, omitió describirlo. También, porque durante la entrevista en esta etapa de su trabajo con el problema, se le cuestionó respecto a por qué no presentó su razonamiento acerca de este proceso, su respuesta fue que no lo entendió.

FPM1: Una aprehensión operativa bueno... en este caso que... con los elementos que nosotros teníamos, como su nombre lo indica hacer operaciones...de alguna manera realizamos identificaciones y la trabajamos (señala triángulos y ángulos en la representación geométrica).

FPM1: En este caso pues... las aprehensiones discursivas son solamente...digamos con los elementos obtenidos (señala los triángulos en la representación geométrica) como que en cada momento argumentar porque la equivalencia de un elemento con otro (señala los lados y los ángulos en la representación geométrica).

FPM1: (respecto al proceso configural) este no...no lo entendí.

Por lo que realizó, el nivel que le corresponde respecto a la categoría de interpretar es el 2, en razón de que en su análisis acerca de su forma de proceder para resolver el problema, interpretó teóricamente algunas de las aprehensiones operativas y algunas de las aprehensiones discursivas. No interpretó teóricamente, los procesos configurales consecuente a que no evidenció un entendimiento sobre éstos.

4.1. 1.b. Futuro Profesor de Matemáticas 2

En el proceso de solución de FPM2 se reconoce un procedimiento similar al que realizó FPM1:

1. Analizó la representación geométrica inicial en conjunto con la hipótesis y tesis del enunciado del problema de probar.
2. Identificó los elementos geométricos que serían clave en su proceso de solución. Para ello, relacionó los datos de la hipótesis del problema con dos de los tres triángulos que “componían” la figura geométrica inicial, los que le serían útil para su solución.
3. Identificó cada uno de los componentes de ambos triángulos: lados y ángulos.
4. Relacionó los componentes de ambos triángulos con la información conocida: dos ángulos homólogos congruentes y un lado homólogo congruente.
5. Reconoció que podía utilizar el criterio de congruencia de triángulos Ángulo-Lado-Ángulo y así demostrar que son congruentes, tesis a probar.

Consecuente a que en su proceso de solución utilizó las mismas aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y los mismos procesos configurales que FPM1, empleamos la Tabla 10 para mostrar el análisis de su proceso de solución al problema de probar con base en el Modelo del Razonamiento Configural.

Así mismo, del análisis de su proceso de solución, los elementos que *identificamos* como relevantes fueron:

- Conceptos y/o propiedades geométricas utilizadas: concepto de triángulo y sus elementos, congruencia de triángulos y criterios de congruencia.
- Modificaciones sobre la figura: reconocimiento de subconfiguraciones geométricas a partir de la configuración geométrica inicial.

Estos elementos fueron contrastados con aquellos que FPM2 identificó del análisis que realizó de su proceso de solución. Al ser cuestionado por el investigador (IN) sobre su respuesta al inciso a) del problema, en el que se le demandó identificar elementos relevantes en su resolución, FPM2 identificó:

- Conceptos y/o propiedades geométricas utilizadas: lados y ángulos comunes en triángulos y criterios de congruencia.

FPM2: Pues propiedades, el lado en común y los ángulos en comunes (señala en su escrito $\overline{AC} = \overline{BC}$ y $\angle CAE = \angle CBD$)

IN: ¿Eso es una propiedad? ¿por qué consideras que es una propiedad?

FPM2: Bueno, 2 y 1 (señala en su escrito $\overline{AC} = \overline{BC}$ y $\angle CAE = \angle CBD$) es parte de la hipótesis y 3 (señala el $\angle C$ como ángulo en común) es una propiedad que identifique aquí...en la figura.

IN: ¿Alguna otra?

FPM2: Bueno, otra propiedad que utilicé fue el criterio de congruencia

A partir del diálogo entre IN y FPM2, notamos que FPM2 tuvo dificultad para utilizar un lenguaje matemático adecuado. Mostró dificultad para diferenciar entre un concepto y una propiedad geométrica por lo que, se limitó a señalar toda la información conocida como propiedades.

- Modificaciones sobre la figura: reconocimiento de triángulos como subconfiguraciones e identificación de sus elementos.

FPM2: Pues...sólo el marcar los ángulos que también, pude no haberlo marcado pero para mí es más fácil de identificarlo así entonces, aquí con dos rayitas (señala el ángulo en C en Figura 7) es porque es de los dos triángulos, y uno (señala el ángulo en B y el ángulo en A en Figura 7) para identificar que es el mismo y como solo es uno, con la misma rayita ya no le puse nombre.

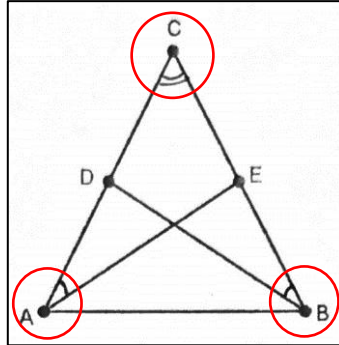


Figura 7. Modificaciones a la configuración geométrica por FPM2.

IN: ¿Alguna otra?

FPM2: Pues identifique los triángulos (señala los triángulos ACE y BCD) pero no hice trazos auxiliares.

Este contraste permitió reconocer que FPM2 tuvo dificultad para identificar los conceptos y propiedades geométricas en su proceso de solución debido al poco entendimiento que evidenció sobre éstos. Por lo anterior no identificó el concepto de triángulo y sus elementos (ángulos y lados) como aspectos claves en su proceso de solución. Así, el nivel que le corresponde respecto a la categoría de identificar es el 2.

Siguiendo con la segunda categoría de análisis, *interpretar*, FPM2 evidenció una interpretación teórica poco profunda sobre su proceso de solución debido a que no interpretó teóricamente todas las aprehensiones operativas y todas las aprehensiones discursivas. Tampoco interpretó teóricamente las relaciones entre las aprehensiones operativas y aprehensiones discursivas como procesos configurales.

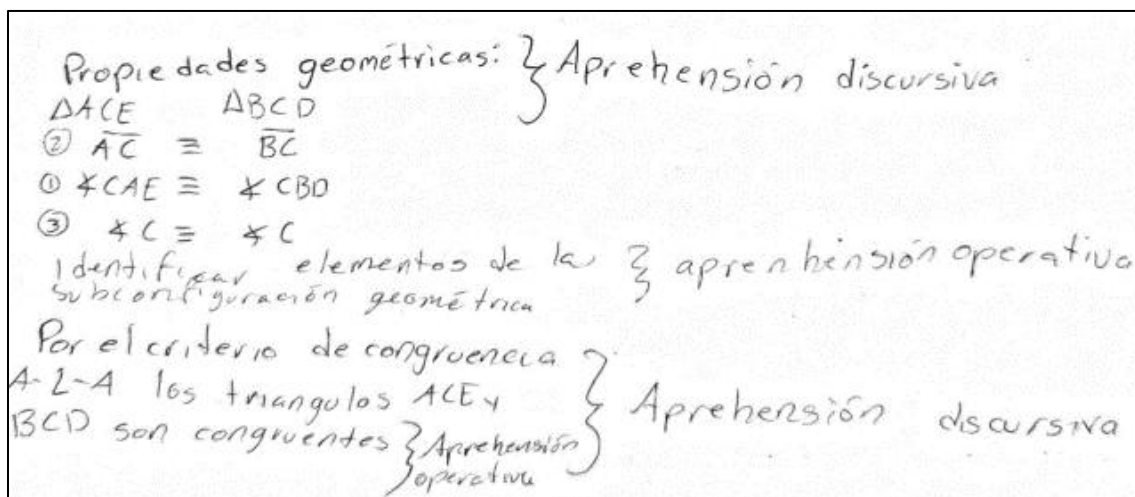


Figura 8. Interpretación de FPM2 sobre su resolución al problema de probar 1.

El análisis sobre su proceso de solución (véase Tabla 10) fue contrastado con la interpretación que hizo sobre el mismo (Véase Figura 8), a fin de entender cómo interpretó teóricamente su actuar respecto de las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales.

A partir de ello notamos que FPM2 interpretó como aprehensión discursiva la información proporcionada por la hipótesis del problema, igualdad de segmentos y de ángulos, así como el criterio de congruencia de triángulos Ángulo-Lado-Ángulo (ALA). De nueva cuenta, mostró dificultad para identificar los conceptos y propiedades geométricas debido a que consideró la hipótesis del problema como aprehensión discursiva. Así mismo, no consideró el concepto de triángulo y sus elementos.

Interpretó como aprehensión operativa la identificación de los elementos de una subconfiguración geométrica y la conclusión sobre la congruencia de triángulos de esta forma, no consideró las modificaciones sobre la configuración geométrica inicial mediante marcas que refieren a la información conocida por la hipótesis del problema, así como su “descomposición” en dos triángulos.

El investigador cuestionó a FPM2 sobre el inciso b) del problema de probar, a fin de profundizar en el entendimiento de su interpretación sobre su proceso de solución mediante los elementos del Modelo del Razonamiento Configural. A diferencia de FPM1, identificamos que FPM2 relacionó las aprehensiones operativas con las modificaciones que realizó sobre la figura geométrica, sean estas “visibles” o no, y las aprehensiones discursivas con los “pasos” que empleó para justificar su proceso de solución. Respecto al proceso configural, FPM2 no evidenció un entendimiento.

FPM2: La aprehensión operativa es lo que hacemos y aunque a veces no lo escribamos, por ejemplo, en este caso identificar elementos de la subconfiguración geométrica, entonces, es como que lo que si razonamos pero que no siempre escribimos.

IN: ¿Razonamos? Pero ¿sobre qué?

FPM2: Sobre...sobre el problema...pues, yo creo sobre identificar el...relaciones, o sea, ver...fue por identificar la figura de los triángulos dentro de la figura general...identificar esta partecita nada más (señala el triángulo CBD) que yo no hice trazos auxiliares ni lo anoté, pero si lo pensé, yo eso entendí.

IN: Respecto a la aprehensión discursiva... ¿qué entiendes por aprehensión discursiva?

FPM2: Los pasos básicos de la demostración donde ponemos porque utilicé tal propiedad o tal teorema.

IN: Entonces, tú señalas la hipótesis y también, señalas la congruencia de triángulos.

FPM2: Sí, porque es lo que conozco.

IN: ¿Y no identificaste los procesos configurales?

FPM2: No, no lo entendí ahí.

Por lo que realizó, el nivel que le corresponde respecto a la categoría de interpretar es el 2, en razón de que en su análisis acerca de su forma de proceder para resolver el problema, no interpretó teóricamente algunas de las aprehensiones operativas y algunas de las aprehensiones discursivas. No interpretó teóricamente, los procesos configurales.

A partir del análisis que realizamos de las repuestas de los FPM al problema de probar 1 y sus interpretaciones sobre sus procesos de solución, notamos que los FPM tuvieron un primer acercamiento en el entendimiento del Modelo del Razonamiento Configural desde su uso. Éste entendimiento estuvo en términos de las aprehensiones operativas y aprehensiones discursivas al ser elementos sobre la figura y conceptos geométricos que “comúnmente” utilizan para responder a un problema de probar. No obstante, en sus interpretaciones no evidencian un entendimiento sobre el proceso configural, de igual forma, consideramos que esto es debido al estudio aislado de figuras y conceptos geométricos al aprender sobre la prueba en geometría.

Lo anterior, nos permitió tomar la decisión que al finalizar la discusión sobre la resolución del problema de probar 1 y su interpretación, retomáramos el análisis de un apartado del documento teórico que refiere a la descripción y ejemplificación del proceso configural y posteriormente, en grupo, se interpretara teóricamente el proceso configural en su resolución.

4.1.2. Problema de probar 2

El análisis de las producciones escritas y verbales de los FPM evidencian las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales que realizaron y que los llevaron a determinar una solución que satisfizo las exigencias del problema. Asimismo, de su interpretación al proceso de solución, en el que identificaron qué elementos fueron claves para resolver el problema. Ambos aspectos, interpretación e identificación, permitieron reconocer el conocimiento de los FPM sobre el Modelo del Razonamiento Configural.

Análogo al problema de probar 1, los FPM siguieron razonamientos similares durante la resolución al problema de probar, en el sentido de que realizaron las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y los procesos configurales. Sin embargo, cada uno evidenció un progreso distinto respecto a la adquisición de las destrezas de identificar e

interpretar en relación con su aprendizaje sobre el Modelo del Razonamiento Configural, como se muestra a continuación.

4.1. 2.a. Futuro Profesor de Matemáticas 1

Con base en el proceso de solución de FPM1 se reconoce el procedimiento siguiente:

1. Interpretó la hipótesis y tesis del enunciado del problema de probar.
2. Tradujo la información conocida (hipótesis del problema) a una representación geométrica conformada por puntos y segmentos de línea recta.
3. Modificó la representación geométrica mediante trazos auxiliares (segmentos de línea recta). Estas modificaciones las realizó a fin de obtener una representación geométrica que implicó los elementos que quería probar (tesis del problema).
4. Identificó los elementos geométricos claves para su solución. Para ello relacionó los datos del problema (hipótesis y tesis) con un triángulo “compuesto” por dos triángulos, los que le serían útil para su solución.
5. Identificó cada uno de los componentes de ambos triángulos: lados y ángulos.
6. Relacionó los componentes de ambos triángulos con la información conocida: dos lados homólogos congruentes y un ángulo homólogo congruente.
7. Reconoció que podía utilizar el criterio de congruencia de triángulos Lado-Ángulo-Lado y así, demostrar que son congruentes.
8. Relacionó el tercer lado homólogo congruente de los triángulos con una representación de la distancia y probó la igualdad entre las distancias, tesis a probar.

Lo que destaca en la solución de FPM1 en este problema, es que construir representaciones geométricas (puntos y rectas) y, visualizar qué formas involucraban la información conocida (triángulo ΔABP compuesto por ΔAMP y ΔBMP), lo llevó a reconocer que es a través de uno de los criterios de congruencia de triángulos (criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado, *LAL*) que se podría replantear el problema de probar y con ello, obtener la solución.

Una vez que se analizó la forma de proceder de FPM1 en el problema de probar, se procedió a comprender el razonamiento que siguió en cada una de sus acciones utilizando elementos del Modelo del Razonamiento Configural.

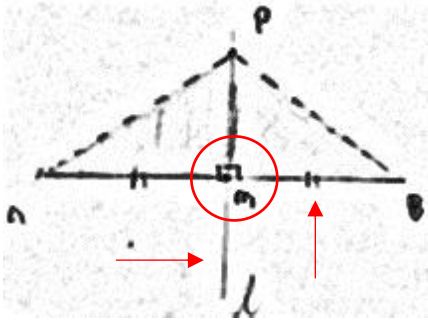
En la Tabla 11 se muestra el análisis de su proceso de solución al problema de probar con base en el Modelo del Razonamiento Configural. Incluye evidencia escrita y verbal.

Tabla 11

Análisis del proceso de solución de FPM1 al problema de probar 2

Enunciado del problema: Sea \overline{AB} un segmento cualquiera y P un punto que pertenece a una recta L , que es perpendicular a \overline{AB} en su punto medio. Prueba que $d(P, A) = d(P, B)$.

Acción del resolutor	Aprehensión operativa	Aprehensión discursiva	Proceso configural
Traduce el enunciado del problema a una representación geométrica.	Construye una configuración geométrica compuesta por:	Concepto de segmento	La coordinación aprehensión discursiva/aprehensión operativa



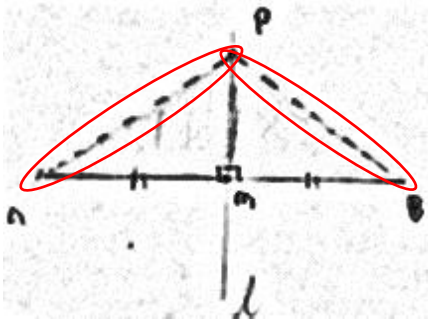
Segmento \overline{AB} , el punto medio m de \overline{AB} , una recta L perpendicular al segmento \overline{AB} en m y un punto P que pertenece a la recta L .

Concepto de punto medio
Propiedad de perpendicularidad

conlleva a tener un referente visual del problema de probar.

FPM1: Lo primero que hice fue tratar de ver estem...para que se me esclareciera un poco más la...lo que teníamos como planteamiento...hacer la representación, en este caso comencé haciendo la representación del segmento (señala \overline{AB}) si después como mencionaba que la recta (señala la recta L) la teníamos que construir perpendicular al segmento debería de pasar por el punto medio (señala el punto m) entonces fue lo que hice, fue poner que era el punto medio aquí (señala el punto m) y trazar una recta perpendicular (señala la recta L)...

Modifica la representación geométrica.



Realiza trazos auxiliares:
Segmentos de recta \overline{AP} y \overline{BP}
Identifica una subconfiguración geométrica compuesta por dos triángulos:
 ΔAPm y ΔBPm

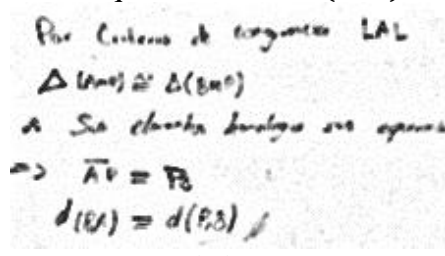
Concepto de triángulos
Concepto de ángulos y lados de un triángulo.

La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva propicia tener una subconfiguración útil que sugiere la solución al problema de probar.

FPM1: A partir de eso lo que fue...traté de visualizar así un esquema rápido de cuál es el procedimiento que iba yo a seguir para resolverlo entonces y...como en este caso me pedía probar una igualdad entre distancias lo que hice fue trazar precisamente esa distancia aja, esos, esas distancias que me mencionaba (señala

<p>\overline{AP} y \overline{BP}) entonces al hacer los trazos me di cuenta de que se me formaban dos triángulos (señala los triángulos ΔAPm y ΔBPm)</p>	<p>Relaciona elementos de la subconfiguración geométrica mediante la descomposición en sus elementos.</p>	<p>Punto medio Criterio de congruencia LAL</p>	<p>La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva propicia probar que los triángulos ΔDBA, ΔEAB son congruentes.</p>
<p><i>FPM1: lo siguiente como ya había visto lo que quería hacer, empecé a identificar cosas que yo ya sabía por hipótesis por ejemplo que si E (señala el punto m) era el punto medio del segmento (señala \overline{AB}) al haber identificado los triángulos (señala los triángulos ΔAPm y ΔBPm) podía yo ver que el segmento que va de A a E (señala el punto m) era lo mismo que el segmento que va de E a B...aja, en este caso por la definición de punto medio, se supone que si es punto medio se conservan las distancias... aja...la igualdad entre las distancias</i> <i>FPM1: Una vez identificado que encontré que estos segmentos eran iguales (Señala \overline{Am} y \overline{mB}) mmm...lo siguiente fue buscar un ángulo (señala $\angle AmP$) que fuera próximo al segmento (señala \overline{Am}) en el cual yo pudiera establecer una equivalencia, en este caso fue el ángulo recto que tenemos acá...nos dice que por este punto medio (señala el punto m) y por este punto P (señala el punto P) pasa una perpendicular al segmento...en este caso la característica, es que, si es perpendicular forma ángulos de 90° (señala $\angle AmP$ y $\angle BmP$), entonces tenemos que este era 90° y este otro era 90° (Señala $\angle AmP$ y $\angle BmP$) entonces podía igualar ambos ángulos, y ya tenía mi segundo elemento que necesitaba,</i></p>	$\overline{AM} = \overline{MB}$ $\angle PMA = \angle BMP$ $\overline{PM} \text{ común}$		

luego pues ver que este lado (señala \overline{Pm}) o este segmento es común a ambos triángulos (señala ΔAmP y ΔBmP)...aja...entonces, una vez ya que identifique los...las equivalencias entre los elementos pues hice alusión al criterio de congruencia lado, ángulo, lado porque en este caso tenía yo, las condiciones necesarias.

<p>Prueba que $d(P, A) = d(P, B)$.</p>  <p>Por criterio de congruencia LAL $\Delta(AmP) \cong \Delta(BmP)$ \therefore Sus elementos homólogos son equivalentes $\Rightarrow \overline{AP} \equiv \overline{PB}$ $d(P, A) = d(P, B)$</p>	<p>Relaciona lados homólogos congruentes en la configuración geométrica a partir de su descomposición.</p> <p>$\overline{AP} \equiv \overline{PB}$</p>	<p>Concepto de congruencia de triángulos</p> <p>Concepto de distancia</p>	<p>La coordinación operativa/aprehensión discursiva propicia probar lo solicitado en el problema.</p>
---	---	---	---

Transcripción de la imagen:
 Por criterio de congruencia LAL
 $\Delta(AmP) \cong \Delta(BmP)$
 \therefore Sus elementos homólogos son equivalentes

$$\rightarrow \overline{AP} \equiv \overline{PB}$$

$$d(P, A) = d(P, B)$$

FPM1: Bueno, pues, una vez teniendo los... ya digamos los elementos que quería yo probar y tenía pues rápidamente... con el criterio de congruencia aja, lado, ángulo, lado, pues por primera parte o como primer elemento, tenía yo que el segmento \overline{AP} era igual con el segmento \overline{PB} entonces, de alguna manera, si ese segmento, le ponemos una escala o lo medimos, ya tendríamos lo que es la distancia.

Del análisis de su proceso de solución, los elementos que *identificamos* como relevantes fueron:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: concepto de punto medio y de distancia, propiedad de perpendicularidad, concepto de triángulo, congruencia de triángulos y criterios de congruencia de triángulos.
- Modificaciones sobre la figura: construcción de configuraciones y subconfiguraciones geométricas mediante trazos auxiliares, así como la identificación de los elementos de las subconfiguraciones.

Estos elementos fueron contrastados con aquellos que FPM1 identificó del análisis que realizó a su proceso de solución. Al ser cuestionado por el investigador sobre su respuesta al inciso a) del problema (identificar elementos relevantes en su resolución), FPM1 mencionó:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: segmento, recta perpendicular, punto medio, triángulo, congruencia de triángulos y criterio de congruencia.

FPM1: en este caso pues, primeramente, la definición de un segmento y cómo lo representamos...luego, por ejemplo, el concepto de recta perpendicular, fue un poco importante, bueno, fue importante...luego, por ejemplo, también el punto medio, el concepto de punto medio...concepto de triángulo...hablando de propiedades...cuando enuncié el criterio de congruencia.

- Modificaciones sobre la figura: construcción de configuraciones y subconfiguraciones geométricas.

FPM1: Pues en este caso como la principal, fue como que adaptar este enunciado que nos daban de manera retórica, creo que así se le dice, a la...digamos, una representación geométrica...mmm...en este caso la relación de la distancia con un segmento, creo que esa fue muy importante...de hecho ese era el objetivo que tenía yo que alcanzar...la existencia de los triángulos pequeñitos (señala los triángulos ΔAPm y ΔBPm).

Este contraste permitió reconocer que FPM1 identificó los conceptos y las propiedades geométricas que utilizó en su proceso de solución, pero solo algunas de las modificaciones que llevó a cabo sobre la configuración geométrica inicial. Por lo que realizó, el nivel que le corresponde respecto a la categoría de identificar es el 2, en razón de que en su análisis acerca de su forma de proceder para resolver el problema, no identificó como aspecto clave el reconocimiento de elementos del triángulo.

Siguiendo con la segunda categoría de análisis, *interpretar*, FPM1 evidenció una interpretación teórica más profunda sobre su solución al problema de probar 2 (Véase Figura 9) en comparación con la interpretación que realizó sobre su proceso de solución al problema de probar 1. En este problema, interpretó teóricamente las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales de acuerdo a distintos “momentos” en su proceso de solución.

Momento	Aprehensión Operativa	Aprehensión Discursiva	Proceso Configural
1	Construcción de acuerdo a la hipótesis	<ul style="list-style-type: none"> Concepto de Punto medio Concepto de Perpendicular 	Identificar un camino
2	Identificación elementos: Angulos, lados <ul style="list-style-type: none"> Etiquetar punto medio 	<ul style="list-style-type: none"> Concepto de Δ Def. Punto medio Def. Ang. recto 	<ul style="list-style-type: none"> Formular los Δ necesarios que se relacionen con lo que queremos demostrar
3	<ul style="list-style-type: none"> Identificar elementos del Δ. Lado común ang. iguales ang. iguales 	<ul style="list-style-type: none"> Criterio de congruencia 	<ul style="list-style-type: none"> Igualdad de segmentos $\overline{AP} \cong \overline{PB}$
4	<ul style="list-style-type: none"> Identificar elementos homólogos \overline{AP} y \overline{PB} 	<ul style="list-style-type: none"> Concepto de distancia 	<ul style="list-style-type: none"> Tesis

Figura 9. Interpretación de FPM1 a su proceso de solución del problema de probar 2.

El análisis sobre su proceso de solución (véase Tabla 11) fue contrastado con la interpretación que FPM1 realizó sobre los distintos momentos en su proceso de solución. Al ser cuestionado por el investigador sobre el inciso b) del problema de probar (interpretar su solución mediante el Modelo del Razonamiento Configural) FPM1 explicó que “dividió” su proceso de solución en cuatro momentos que refieren a los pasos ordenados que siguió. En cada momento, analizó su actuar y lo interpretó teóricamente con las aprehsiones operativas, las aprehsiones discursivas y los procesos configurales.

El contraste que se realizó muestra lo siguiente:

Similitudes:

- Identificó cuatro momentos en su proceso de solución que refieren a las acciones del resolutor.
- Según el momento en su proceso de solución, señaló como aprehsiones discursivas el concepto de punto medio, la propiedad de perpendicularidad, el concepto de triángulo y de congruencia de triángulos, así como el concepto de distancia.
- Según el momento en su proceso de solución, señaló como aprehsiones operativas la construcción de acuerdo a la hipótesis (configuración geométrica inicial),

identificación de elementos (asociados a la construcción de una subconfiguración) e identificar elementos homólogos (relacionar elementos de la subconfiguración).

Diferencias:

- No interpretó la construcción de dos triángulos como una aprehensión operativa.
- No interpretó la prueba de congruencia entre los triángulos como un proceso configural.

Por lo que realizó, el nivel que le corresponde respecto a la categoría de interpretar es el 3, en razón de que en su análisis acerca de su forma de proceder para resolver el problema, interpretó teóricamente algunas de las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y los procesos configurales. No obstante, en comparación con la interpretación que realizó sobre su solución al problema de probar 1, su interpretación es más profunda e incluye el proceso configural.

FPM1 progresó en su aprendizaje sobre el Modelo del Razonamiento Configural en relación a la adquisición de las destrezas de identificar e interpretar. Interpreta teóricamente sus manipulaciones sobre la configuración geométrica como aprehensiones operativas y, la coordinación entre aprehensión operativa y aprehensión discursiva como proceso configural. Inferimos que tal progreso es consecuente del análisis realizado en grupo, sobre el proceso de solución del problema de probar 1. Se plantearon preguntas de discusión como: ¿qué relaciones se establecen entre la figura y los conceptos y propiedades geométricas? ¿cuál es el papel de tales relaciones en el proceso de solución? Este análisis permitió a los FPM identificar qué aspectos “mirar” al interpretar su proceso de solución utilizando el proceso configural.

A continuación, se muestra su respuesta verbal al ser cuestionado por el investigador sobre la aprehensión operativa, la aprehensión discursiva y el proceso configural.

FPM1: Una aprehensión operativa pues es como...nos dan a nosotros elementos que podemos nosotros manipular u operarlas, no tanto como hacemos en álgebra o aritmética, sino más que nada, en...no saliéndome de las definiciones que yo tengo y los conceptos...lograr manipularlos.

FPM1: (Respecto a la aprehensión discursiva) En este caso sería la justificación de porque yo estoy usando no sé, en un momento cierta propiedad o cierto concepto.

FPM1: El proceso configural pues fue, prácticamente, lograr observar ambas cosas al mismo tiempo, tanto las operaciones de...de los elementos que yo tengo y la parte de justificación.

4.1. 2.b. Futuro Profesor de Matemáticas 2

En el proceso de solución de FPM2 se reconoce un procedimiento similar al que realizó FPM1:

1. Interpretó la hipótesis y tesis del enunciado del problema de probar.
2. Tradujo la información conocida (hipótesis del problema) a una representación geométrica conformada por puntos y segmentos de línea recta.

3. Modificó la representación geométrica mediante trazos auxiliares (segmentos de línea recta). Estas modificaciones las realizó a fin de obtener una representación geométrica que incluyó los elementos que quería probar (tesis del problema).
4. Identificó los elementos geométricos claves para su solución. Para ello relacionó los datos del problema (hipótesis y tesis) con un triángulo “compuesto” por dos triángulos, los que le serían útil para su solución.
5. Identificó cada uno de los componentes de ambos triángulos: lados y ángulos.
6. Relacionó los componentes de ambos triángulos con la información conocida: dos lados homólogos congruentes y un ángulo homólogo congruente.
7. Reconoció que podía utilizar el criterio de congruencia de triángulos Lado-Ángulo-Lado y así demostrar que son congruentes.
8. Relacionó el tercer lado homólogo congruente de los triángulos como una representación de la distancia y probó la igualdad en las distancias, tesis a probar.

Consecuente a que en su procedimiento utilizó aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales similares a FPM1, empleamos la Tabla 11 para mostrar el análisis de su proceso de solución al problema de probar con base en el Modelo del Razonamiento Configural.

Así mismo, del análisis de su proceso de solución, los elementos que identificamos como relevantes fueron:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: concepto de punto medio y de distancia, propiedad de perpendicularidad, concepto de triángulo, congruencia de triángulos y criterios de congruencia de triángulos.
- Modificaciones sobre la figura: construcción de configuraciones y subconfiguraciones geométricas mediante trazos auxiliares, así como la identificación de los elementos de las subconfiguraciones.

Estos elementos fueron contrastados con aquellos que FPM2 identificó del análisis que realizó a su proceso de solución. Al ser cuestionado por el investigador sobre su respuesta al inciso a) del problema (identificar elementos relevantes en su resolución), notamos que FPM2 destacó en su explicación:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: propiedad de perpendicularidad, concepto de punto medio, concepto de triángulos, congruencia de triángulos, criterios de congruencia de triángulos y concepto de distancia.
- Modificaciones sobre la figura: construcción de configuraciones geométricas.

Este contraste permitió reconocer que FPM2 identificó los conceptos y propiedades geométricas que utilizó en su proceso de solución, pero no destacó las modificaciones que realizó sobre la configuración geométrica inicial como un aspecto clave en su proceso de solución. El nivel que le corresponde respecto a la categoría de identificar es el 2, en razón de que en su análisis acerca de su forma de proceder para resolver el problema, no identificó como aspecto clave la construcción de subconfiguraciones geométricas.

Siguiendo con la segunda categoría de análisis, *interpretar*, FPM2 evidenció una interpretación teórica más profunda sobre su proceso de solución al problema de probar 2 en comparación con la que realizó en el problema de probar 1. En este problema, interpretó

teóricamente las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales de acuerdo a distintos “momentos” en su proceso de solución (Véase Figura 10).

Momento	Aprehensión operativa	Aprehensión Discursiva	Proceso Configural
1	Identificar elementos Construcción auxiliar	Concepto de punto medio Concepto de perpendicular	Identificar un camino
2	Identificar elementos: • 2 Δ 's • ángulos rectos • segmento común • segmentos iguales • punto medio (deliquelar)	Concepto de triángulo Relación perpendicular con ángulos rectos	Identificar Δ 's APO y POB que son los que vamos a utilizar
3	Identificar elementos de los Δ 's APO y POB	Criterio de congruencia	Segmentos $AP \cong PB$
4	Identificar elementos homólogos	Concepto de distancia Relación	Solución de la demostración

Figura 10. Interpretación de FPM2 a su proceso de solución del problema de probar 2.

El análisis sobre su proceso de solución (véase Tabla 11) fue contrastado con la interpretación que FPM2 realizó sobre los distintos momentos en su proceso de solución (Véase Figura 10). Al ser cuestionado por el investigador sobre el inciso b) del problema de probar (interpretar su solución mediante el Modelo del Razonamiento Configural) FPM2 explicó su interpretación basándose en 4 momentos principales de su proceso de solución, en cada momento, analizó su actuar y lo interpretó teóricamente con las aprehensiones operativas, las aprehensiones discursivas y los procesos configurales.

El contraste que se realizó muestra lo siguiente:

Similitudes:

- Identificó cuatro momentos en su proceso de solución, que refieren a las acciones realizadas por el resolutor.
- Según el momento en su proceso de solución, señaló como aprehensiones discursivas el concepto de punto medio, concepto de perpendicularidad, concepto de triángulo, criterio de congruencia y concepto de distancia.
- Según el momento, señaló como aprehensiones operativas la construcción de acuerdo a la hipótesis (configuración geométrica inicial), identificación de elementos en la subconfiguración geométrica (triángulos y lados y ángulos como sus elementos) e identificar elementos homólogos (relacionar elementos de la subconfiguración).
- En el momento 2 de su proceso de solución, interpretó teóricamente que la coordinación entre la aprehensión operativa/aprehensión discursiva propició identificar una subconfiguración útil para la solución al problema de probar.

- En el momento 4 de su proceso de solución, interpretó teóricamente que la coordinación entre la aprehensión operativa/aprehensión discursiva propició probar lo solicitado en el problema.

Diferencias:

- No interpretó la construcción de dos triángulos como una aprehensión operativa.
- No interpretó la coordinación aprehensión discursiva/aprehensión operativa del primer momento de su proceso de solución, en cuanto a un referente visual del problema de probar.
- No interpretó la coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva del momento tres de su proceso de solución, en cuanto a probar que los triángulos eran congruentes.

El nivel que le corresponde respecto a la categoría de interpretar es el 3, en razón de que en su análisis acerca de su forma de proceder para resolver el problema, interpretó teóricamente algunas de las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales. Enfatizamos que en comparación con la interpretación que realizó sobre su proceso de solución al problema de probar 1, su interpretación es más profunda al incorporar al proceso configural. Análogo a FPM1, inferimos que el entendimiento sobre el proceso configural fue consecuente del análisis realizado en grupo, sobre el proceso de solución del problema de probar 1. Las preguntas de discusión como: ¿qué relaciones se establecen entre la figura y los conceptos y propiedades geométricas? ¿cuál es el papel de tales relaciones en el proceso de solución? permitió a los FPM identificar qué aspectos “mirar” al interpretar su proceso de solución utilizando el proceso configural.

También, evidenció un cambio en su conocimiento sobre qué es una aprehensión operativa y qué es una aprehensión discursiva. Interpretó teóricamente los “pasos” que realizó sobre la figura como las aprehensiones operativas y las propiedades, conceptos y definiciones que utilizó en cada “paso” que realizó sobre la figura como las aprehensiones discursivas, esto le permite dar un orden y entendimiento a su razonamiento. Consideramos que este cambio en su conocimiento se debió al cuestionamiento individual sobre su proceso de solución e interpretación al problema de probar anterior. FPM2 fue cuestionado durante la entrevista sobre el razonamiento que siguió para resolver el problema de probar a fin de que profundizará en su análisis sobre el mismo, reconociera los aspectos clave en su solución y posteriormente, los relacionará con los elementos teóricos del Modelo del Razonamiento Configural.

Durante la entrevista que el investigador realizó a FPM2 respecto a su respuesta al inciso b) del problema de probar, mencionó:

FPM2: Operativa es...los pasos básicos de la figura que realizamos para ir realizando la demostración...por aprehensión discursiva es todo el conocimiento que tenemos que tener para poder utilizarlo.

4.1.3. Problema de probar 3

Los FPM siguieron razonamientos similares durante la resolución al problema de probar, en el sentido de que realizaron las aprehensiones operativas, las aprehensiones discursivas y los procesos configurales. Sin embargo, cada uno evidenció un progreso distinto respecto a su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural ante la adquisición de las destrezas de identificar e interpretar, como se muestra en seguida.

4.1.3.a. Futuro Profesor de Matemáticas 1

Con base en el proceso de solución de FPM1 se reconoce el procedimiento siguiente:

1. Analizó la representación geométrica inicial en conjunto con la hipótesis y tesis del enunciado del problema probar.
2. Relacionó los datos de la hipótesis del problema con la representación de un segmento “compuesto” por otros dos segmentos de línea recta y que la tesis del problema, correspondía a otros dos segmentos de línea recta.
3. Planteó una conjetura de equivalencia entre los segmentos. Tales segmentos se relacionan con la hipótesis y tesis del problema de probar.
4. Identificó los elementos geométricos clave en su proceso de solución. Para ello relacionó la conjetura sobre la equivalencia de segmentos, con dos triángulos que formaban parte de la representación geométrica inicial.
5. Identificó los ángulos como componentes de cada triángulo.
6. Estableció relaciones de igualdad entre los ángulos de ambos triángulos a partir de la información conocida (propiedad de paralelismo y concepto de bisectriz).
7. Concluyó que ambos triángulos eran isósceles.
8. Relacionó los lados de los triángulos isósceles con segmentos equivalentes. Consecuentemente, logró probar la conjetura de equivalencia en la medida de segmentos.
9. Sustituyó los segmentos equivalentes en el segmento “compuesto” (2) y así probar la relación de suma, tesis a probar.

Lo que se destaca en la solución de FPM1 en este problema, es que el visualizar con que elementos de la representación geométrica inicial trabajar ($\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{DF}$; $\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{BF}$) lo llevó a plantear una conjetura ($\overline{AE} = \overline{ED}$, $\overline{DF} = \overline{FB}$) que guio su forma de proceder para dar solución al problema. Logró identificar las figuras geométricas (ΔAED y ΔBFD) que relacionaban los elementos de la conjetura y con apoyo del concepto de triángulo isósceles, probó la conjetura y consecuentemente, la tesis del problema de probar.

Una vez que se analizó la forma de proceder de FPM1 en el problema de probar, se procedió a comprender el razonamiento que siguió en cada una de sus acciones. Se utilizó para ello, la aprehensión operativa, la aprehensión discursiva y el proceso configural, elementos del Modelo del Razonamiento Configural.

En la Tabla 12 se muestra el análisis de su proceso de solución al problema de probar con base en el Modelo del Razonamiento Configural. Incluye evidencia escrita y verbal.

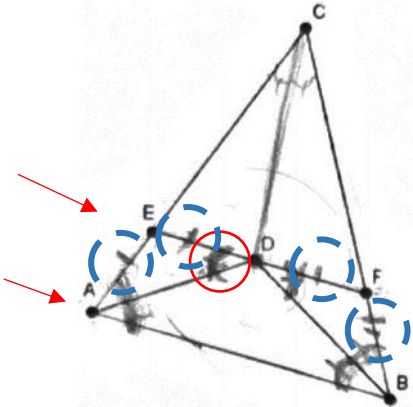
Tabla 12

Análisis del proceso de solución de FPM1 al problema de probar 3

Enunciado del problema: En el triángulo de la figura D es el Incentro y \overline{EF} es paralelo a \overline{AB} . Prueba que $\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{BF}$

Configuración inicial:

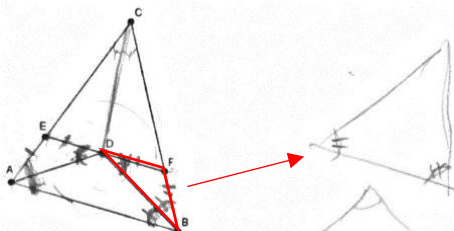


Acción del resolutor	Aprehensión operativa	Aprehensión discursiva	Proceso configural
<p>Usa la configuración geométrica inicial y el enunciado para anticipar una posible estrategia de resolución del problema.</p> 	<p>Modifica la configuración inicial mediante marcas. Razona sobre la configuración geométrica inicial y decide sobre los pasos consecuentes para la resolución del problema.</p>	<p>Incentro Rectas paralelas Longitud de un segmento suma</p>	<p>La coordinación aprehensión discursiva/aprehensión operativa conlleva al planteamiento de una conjetura: $\overline{ED} = \overline{EA}$ y $\overline{DF} = \overline{FB}$</p>
<p><i>FPM1: Desglosar o separar los elementos de la hipótesis, por ejemplo, la primera parte que nos dice un punto D como mencionan ahí es el Incentro, luego que el segmento \overline{EF} es paralelo al segmento \overline{AB} como segunda hipótesis....</i></p>	<p><i>FPM1: Para tratar de establecer un camino...para solucionar aquí el problema y probar lo que nos están pidiendo pues los elementos que tenía en la hipótesis comencé a marcarlos, digamos el punto D lo identifiqué como el incentro (señala el punto D) luego que el \overline{EF} era paralelo al \overline{AB} (señala ambos segmentos) esas son las dos cosas que yo tenía entonces, una vez que yo, rápidamente identifiqué esos elementos pues traté de ver qué elementos</i></p>		

estaban relacionados ahí, que es lo que podría encontrar...

FPM1: la figura me ayudó mucho a identificar por ejemplo, que me pedían encontrar una... que el segmento total (señala \overline{EF}) lo podemos ver como la suma de este (señala \overline{AE}) más el otro de acá (señala \overline{FB}) si entonces, rápidamente lo que pensé fue que si este segmento (señala \overline{EF}) también lo puedo ver como la suma de las partes integrantes (señala \overline{ED} y \overline{DF}) pues únicamente hay que encontrar la igualdad entre estos dos segmentos la de aquí (señala \overline{AE}) con la de acá (señala \overline{ED}) y la de aquí (señala \overline{DF}) con la de acá (señala \overline{FB})...

“Descompone” la configuración geométrica inicial.



FPM1: si ya sé que quiero encontrar que esos dos lados (señala \overline{AE} y \overline{ED}) son iguales...y me dan elementos para los ángulos pues recuerdo la propiedad de los isósceles.

Identifica una subconfiguración geométrica compuesta por dos triángulos, así como sus elementos:

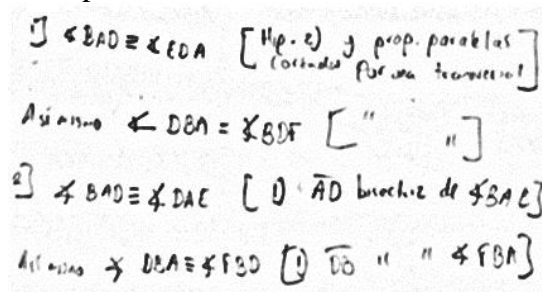
Triángulos ΔAED y ΔBFD .
Lados y ángulos de los triángulos ΔAED y ΔBFD .

Concepto de triángulos

Concepto de ángulos y lados de un triángulo.

La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva propicia tener una subconfiguración útil para la resolución del problema de probar.

Asocia los elementos de la subconfiguración geométrica por medio de la propiedad de paralelismo y el concepto de bisectriz.



FPM1: observé que, al ser paralelas estas dos rectas (señala \overline{EF} y \overline{AB}) y ver esta recta que corta a las dos (señala \overline{DB}) entonces puedo establecer ahí una igualdad entre ángulos aja, estem, bueno, en la parte

Relaciona elementos de las subconfiguraciones geométricas.

Ángulos:
 $\angle DAE$
 $= \angle EDA$
 $\angle FDB$
 $= \angle FBD$

Propiedad de paralelismo

Concepto de bisectriz

La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva propicia probar que los ángulos son congruentes

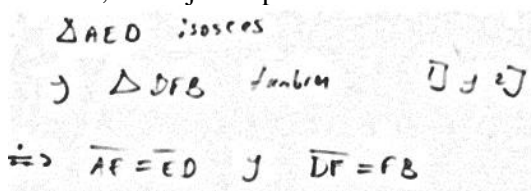
de la demostración ahí menciono que los ángulos que yo puedo establecer igualdad es el $\angle BAD$ (señala el ángulo $\angle BAD$ en la figura) ...con su alterno dentro de las paralelas (señala las paralelas \overline{EF} y \overline{AB}) o sea, el ángulo $\angle ADE$, eso por un lado, por el otro lado me di cuenta que también igual, tenemos la misma situación son dos paralelas (señala las rectas paralelas \overline{EF} y \overline{AB}) por lo cual está pasando la transversal (señala \overline{DB}) podemos establecer la igualdad entre el ángulo mmm... $\angle DBA$ (señala el ángulo $\angle DBA$ en la figura) aja, con el ángulo $\angle BDF$ (señala en la figura), este de acá con el de acá (señala los ángulos $\angle DBA$ y $\angle BDF$ en la figura) ...por la propiedad de las paralelas que son cortadas por una transversal...son ángulos alternos internos

FPM1: Ok, luego en la parte número dos lo que yo hice fue así mismo establecer una igualdad entre ángulos pero ahora utilizando la hipótesis 1, sabiendo que D es el incentro, el lugar donde se intersectan las tres bisectrices de un triángulo puedo ver que si esta es una bisectriz (Señala el segmento \overline{AD}) entonces estos ángulos (señala los ángulos $\angle EAD$ y $\angle DAB$) son iguales, igual esta era una bisectriz (señala el segmento \overline{DB}) estos ángulos iguales (señala los ángulos $\angle DBF$ y $\angle DBA$) y por arriba también (señala los ángulos $\angle ECD$ y $\angle FCD$) entonces, de ahí solamente dije que el ángulo $\angle BAD$, este de acá (señala el ángulo A) era igual con el que está de este lado (señala el ángulo $\angle EAD$) sí, luego del otro lado igual, este ángulo (señala $\angle DBF$) es igual con el de acá (señala el ángulo $\angle DBA$)...de momento he establecido igualdad entre estos ángulos.

FPM1: Aja, luego, me brinqué el paso, pero rápidamente se puede obtener ¿no? Que, como ya tengo que estos dos son iguales (señala los ángulos $\angle DAE$ y $\angle DAB$) y este (señala el ángulo $\angle BAD$) igual con el de acá (señala el ángulo $\angle EDA$) entonces, como que utilizamos la propiedad de la igualdad...la propiedad de la transitiva, entonces yo digo que este ángulo (señala el ángulo $\angle DAE$)

es igual con el de acá (señala el ángulo $\angle EDA$), entonces establezco aquí esa igualdad entre los dos ángulos...y del otro lado también podemos hacer lo mismo, estos dos ángulos (señala los ángulos $\angle FDB$ y $\angle FBD$) son iguales.

Prueba que los triángulos son isósceles y con ello, la conjetura planteada.



FPM1: Una vez que ya tenemos esos dos ángulos iguales utilizo una característica que tienen los...oh, bueno, una de las propiedades que tienen los triángulos isósceles que en este caso (señala el triángulo ΔAED) en un triángulo isósceles si tenemos...perdón que, los lados opuestos a ángulos iguales los segmentos también son iguales, perdón los segmentos opuestos a ángulos iguales también son iguales...como ya había establecido que estos eran iguales (señala el ángulo $\angle EAD$ y $\angle DAE$) naturalmente...este (señala el lado \overline{EA}) era igual con el de acá (señala \overline{ED}) y del otro lado lo mismo, mismo razonamiento, este segmento (señala \overline{DF}) es igual con este segmento (señala \overline{FB}) de acá.

Relaciona elementos de las subconfiguraciones geométricas. Lados:

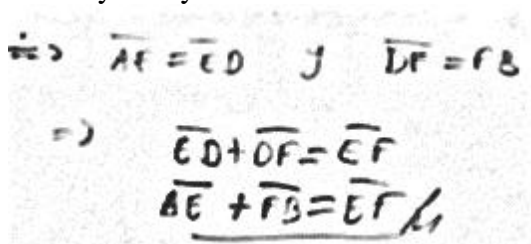
$$\overline{EA} = \overline{ED}$$

$$\overline{DF} = \overline{FB}$$

Concepto de triángulo isósceles

La coordinación operativa/aprehensión discursiva propicia probar la conjetura.

Sustituye \overline{BF} y \overline{AE}



FPM1: Una vez hecho eso establecí la igualdad entre los lados, naturalmente...hemos demostrado que el ángulo AE (Señala el lado \overline{AE}) perdón, segmento \overline{AE} , es igual con el ED , y por el otro lado el \overline{DF} , con el \overline{FB} entonces, ya que tengo esa igualdad entre segmentos, aja ahora observo que este segmento (señala

Se conserva la subconfiguración geométrica y se relaciona con la configuración geométrica inicial.

Axioma de transitividad Longitud de un segmento suma

La coordinación operativa/aprehensión discursiva conlleva a la solución del problema de probar

\overline{EF}) que, finalmente lo que queremos encontrar (señala $\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{BF}$) una equivalencia para \overline{EF} también lo podemos ver como la descomposición del ángulo...del segmento \overline{ED} más el \overline{DF} ...aja, en este caso, usando una...bueno, es un principio de...se mencionaba mucho en geometría, que una totalidad la podemos ver como la suma de sus partes integrantes entonces, aja, una totalidad (señala \overline{EF}) como la suma de las partes (señala \overline{ED} y \overline{DF}) que la componen...entonces, una vez, hecho eso, como ya había establecido una equivalencia para este segmento (Señala \overline{ED}) únicamente lo que hago es sustituirlo (señala \overline{AE}), como que sustituirlo en la ecuación (Señala $\overline{ED} + \overline{DF} = \overline{EF}$, $\overline{AE} + \overline{FB} = \overline{EF}$) y ya, finalmente obtengo lo que yo quería...bueno lo que se pedía.

Del análisis de su proceso de solución, los elementos que *identificamos* como relevantes fueron:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: concepto de triángulo isósceles, bisectriz y de incentro, propiedad de paralelismo y longitud de un segmento suma.
- Modificaciones sobre la figura: identificación de una subconfiguración geométrica compuesta por dos triángulos y sus elementos (lados y ángulos) y, reconocimiento de relaciones entre los elementos de las configuraciones y subconfiguraciones geométricas.

Estos elementos fueron contrastados con aquellos que FPM1 identificó del análisis que realizó a su proceso de solución. Al ser cuestionado por el investigador sobre su respuesta al inciso a) del problema, en el que se le demandó identificar elementos relevantes en su resolución, FPM1 identificó:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: concepto de triángulo isósceles, longitud de un segmento suma, concepto de bisectriz, triángulo y de incentro.

FPM1: Pues en este caso ya nos dijeron ese punto que llaman incentro y recordamos propiedades que tiene el incentro o qué es el incentro, pues es donde se intersectan las bisectrices, pues es una definición...luego, por ejemplo, la parte de las paralelas, que lo menciono en esta parte, al ser dos paralelas cortadas por una transversal pues hay una propiedad de paralelismo, lo que, los ángulos alternos internos son equivalentes, los ángulos correspondientes son equivalentes...luego, por ejemplo, la definición de bisectriz, que la bisectriz divide al ángulo en dos

partes iguales, luego. Qué más... las propiedades de los triángulos isósceles que a lados iguales se le oponen ángulos iguales.

- Modificaciones sobre la figura: identificación de subconfiguraciones y sus elementos y, reconocimiento de relaciones entre los elementos de las configuraciones y subconfiguraciones geométricas.

FPM1: Creo que si fue muy importante observar los elementos aquí en la (señala la figura) por ejemplo, yo inicialmente fuera de ver aquí lo que tenemos como hipótesis, observé la tesis lo que queremos encontrar y la figura me ayudó mucho a identificar por ejemplo, que me pedían encontrar una, que el segmento total lo podemos ver como la suma de este...más el otro de acá...si entonces, rápidamente lo que pensé fue que si este segmento...también lo puedo ver como la suma de las partes integrantes...pues únicamente hay que encontrar la igualdad entre estos dos segmentos...Es ir construyendo... hacia atrás si ya sé que quiero encontrar que esos dos lados son iguales...y me dan elementos para los ángulos pues recuerdo la propiedad de los isósceles...me lleva un paso más atrás, que es establecer la igualdad entre los ángulos.

Este contraste permitió reconocer que FPM1 identificó los conceptos y las propiedades geométricas que utilizó en su proceso de solución, así como las modificaciones que llevó a cabo sobre la configuración geométrica inicial. El nivel que le corresponde respecto a la categoría de identificar es el 3, en razón de que progresó en su análisis acerca de su forma de proceder para resolver el problema.

Siguiendo con la segunda categoría de análisis, *interpretar*, FPM1 evidenció una interpretación teórica más detallada sobre su proceso de solución en comparación con la que realizó respecto al problema de probar 2. FPM1 profundizó su análisis sobre las relaciones entre los conceptos y propiedades geométricas que empleó y las modificaciones que realizó sobre la configuración geométrica mediante el elemento teórico de proceso configuracional (Véase Figura 11).

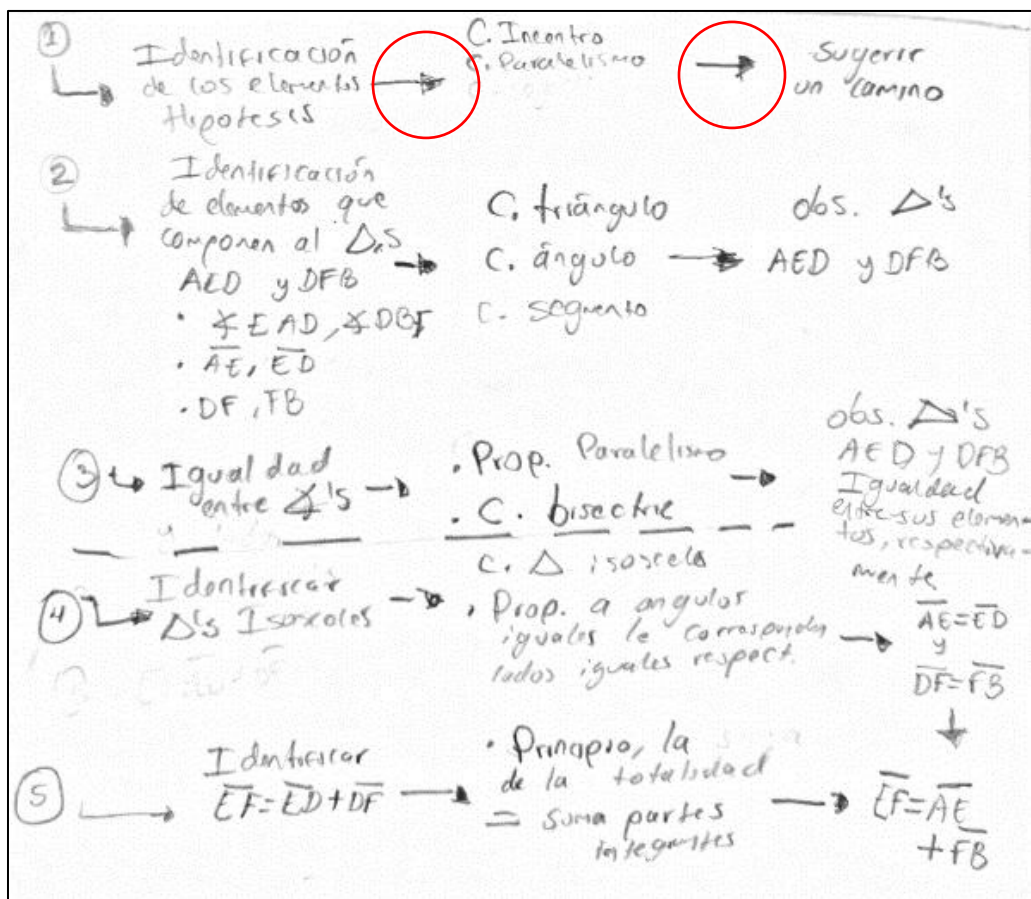


Figura 11. Interpretación de FPM1 a su proceso de solución del problema de probar 3.

El análisis sobre su proceso de solución (Véase Tabla 12) fue contrastado con la interpretación que hizo sobre el mismo, a fin de entender cómo interpretó teóricamente su actuar respecto de las aprehensiones operativas, las aprehensiones discursivas y los procesos configurales. Al ser cuestionado por el investigador sobre el inciso b) del problema de probar (interpretar su solución mediante el Modelo del Razonamiento Configural) FPM1 explicó que dividió su proceso de solución en distintos momentos que refieren a los pasos ordenados que siguió. En cada momento señaló las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas y las relacionó utilizando los procesos configurales (Véase las flechas señaladas en Figura 11).

En comparación con su análisis sobre el problema 2, FPM1 destacó las relaciones involucradas en los procesos configurales, así como el papel que estos desempeñan en su proceso de solución. Esto da evidencia de un mayor entendimiento sobre su razonamiento y el porqué de su forma de proceder.

El contraste que se realizó muestra lo siguiente:

Similitudes:

- Identificó cinco momentos en su proceso de solución que refieren a las acciones realizadas por el resolutor.

- Según el momento en su proceso de solución, señaló como aprehensiones discursivas el concepto de incentro, paralelismo, elementos del triángulo, propiedad de paralelismo y ángulos correspondientes y el principio de la totalidad.
- Según el momento en su proceso de solución, señaló como aprehensiones operativas la identificación de subconfiguraciones geométricas (triángulos) y sus elementos (lados y ángulos) y el reconocimiento de relaciones entre los elementos de los triángulos.
- Destacó las relaciones entre las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas utilizando los procesos configurales.

Diferencias:

- No interpretó la prueba de la conjetura como un proceso configural.

Por lo que realizó, el nivel que le corresponde respecto a la categoría de interpretar es el 4, en razón de que realizó una interpretación más detallada de su proceso de solución. FPM1 interpretó teóricamente todas las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas, no obstante, interpretó algunos de los procesos configurales, destacando su papel en la resolución del problema de probar. De igual forma, la discusión grupal fue clave para el logro de este progreso debido a que una pregunta a reflexionar fue ¿cuál es el papel del proceso configural en el proceso de solución?

4.1. 3.b. Futuro Profesor de Matemáticas 2

En el proceso de solución de FPM2 se reconoce un procedimiento similar al que realizó FPM1:

1. Analizó la representación geométrica inicial en conjunto con la hipótesis y tesis del enunciado del problema probar.
2. Relacionó los datos de la hipótesis del problema con la representación de un segmento “compuesto” por otros dos segmentos de línea recta y que la tesis del problema, correspondía a otros dos segmentos de línea recta.
3. Planteó una conjetura de equivalencia entre los segmentos. Tales segmentos referían a la hipótesis y tesis del problema de probar.
4. Identificó los elementos geométricos claves en su proceso de solución. Para ello relacionó la conjetura de equivalencia entre los segmentos, con dos triángulos que formaban parte de la representación geométrica inicial.
5. Identificó los ángulos como componentes de cada triángulo.
6. Estableció relaciones de igualdad entre los ángulos de ambos triángulos a partir de la información conocida (propiedad de paralelismo y concepto de bisectriz).
7. Concluyó que ambos triángulos eran isósceles.
8. Relacionó los lados de los triángulos isósceles con segmentos equivalentes. Consecuentemente, logró probar la conjetura de equivalencia en la medida de segmentos.
9. Sustituye los segmentos equivalentes en el segmento “compuesto” (2) y así demostrar la relación de suma, tesis a probar.

Debido a que, en su proceso de solución, realizó aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales similares a FPM1, empleamos la Tabla 12 para mostrar el análisis de su proceso de solución al problema de probar con base en el Modelo del Razonamiento Configural.

Así mismo, del análisis de su proceso de solución, los elementos que identificamos como relevantes fueron:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: concepto de triángulo isósceles, bisectriz y de incentro, propiedad de paralelismo y longitud de un segmento suma.
- Modificaciones sobre la figura: identificación de una subconfiguración geométrica compuesta por dos triángulos y sus elementos (lados y ángulos) y, reconocimiento de relaciones entre los elementos de las configuraciones y subconfiguraciones geométricas.

Estos elementos fueron contrastados con aquellos que FPM2 identificó del análisis que realizó a su proceso de solución. Al ser cuestionado por el investigador sobre su respuesta al inciso a) del problema, en el que se le demandó identificar elementos relevantes en su resolución, FPM2 mencionó:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: propiedad de paralelismo, relación entre rectas paralelas cortadas por una transversal y concepto de incentro.

FPM2: Pues no lo hubiéramos logrado sin tener claro el de...paralelas cortadas por una transversal y pues, que es incentro.

- Modificaciones sobre la figura: identificación de subconfiguraciones y sus elementos y, reconocimiento de relaciones entre los elementos de las configuraciones y subconfiguraciones geométricas.

FPM2: Pues lo importante de la figura es ver que el segmento \overline{EF} se puede ver como la suma de dos segmentos \overline{ED} y \overline{DF} porque eso no, no...o sea escrito no está...sino fuera por la figura pues no nos daríamos cuenta de eso y, sin eso, pues no tendría caso ver que los triángulos son isósceles y que lo que se está probando es igual a la suma de ese segmento.

Este contraste permitió reconocer que FPM2 identificó algunos de los conceptos y propiedades geométricas que utilizó en su proceso de solución, los cuales son: propiedad de paralelismo, relación entre rectas paralelas cortadas por una transversal y concepto de incentro, pero no identificó el concepto de triángulo isósceles, bisectriz y longitud de un segmento suma como elementos geométricos clave en su proceso de solución. El nivel que le corresponde respecto a la categoría de identificar es el 2, en razón de que aún no logra identificar todas las propiedades y conceptos geométricos involucrados en su proceso de solución al problema de probar.

Siguiendo con la segunda categoría de análisis, *interpretar*, FPM2 evidenció una mayor dificultad para realizar su interpretación en comparación con el problema de probar 1 y el

problema de probar 2. Interpretó en mayor medida los conceptos y propiedades como aprehensiones discursivas, pero no interpretó muchas de las modificaciones sobre las configuraciones y subconfiguraciones geométricas como aprehensiones operativas (Véase Figura 12). Plantemos que esto es debido a que el análisis de la resolución del problema de probar implica reconocer una primera prueba “local” que requiere conceptos y propiedades geométricas, así como modificaciones sobre las configuraciones y subconfiguraciones geométricas, que permite dar solución al problema de probar “general”.

Momento	AO	AD	PC
①	Identificar los elementos de la hipótesis en la figura	C. Incentro C. Paralelismo C. Segmentos (prop)	Identificar un camino a seguir Asociar el enunciado con la figura Identificar si Δ 's
②	Identificar los elementos de los Δ 's AED y DFB • $\angle EAD, \angle DBF$ • $\overline{AE}, \overline{BF}$ • $\overline{ED}, \overline{DF}$	C. triángulo	AED y DFB son isósceles Plantear la conjetura de que Δ AED es isósceles y Δ DFB también lo es
③	Identificar que el ángulo EDA y el ángulo DAB y $\angle FDB$ y $\angle ABD$	C. paralelismo y propiedades al cortar las paralelas por una transversal	$\overline{AE} = \overline{ED}$ $\angle EAD = \angle EDA$ $\angle FDB = \angle FDB$
④	Identificar la relación entre los Δ 's isósceles AED, DFB	• Concepto Δ 's isósceles Rela. ángulos iguales, lados iguales	$\overline{AE} = \overline{ED}$ $\overline{DF} = \overline{FB}$ Prueba de la conjetura
⑤	Verificar el segmento EF = ED + DF	C. Isósceles C. y Prop. de segmentos (suma) Prop. de suma de segmentos • Δ isósceles	$\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{BF}$ Sol. de la dem.

Figura 12. Interpretación de FPM2 a su proceso de solución del problema de probar 3.

El análisis sobre su proceso de solución (Véase Tabla 12) fue contrastado con la interpretación que hizo sobre el mismo (Véase Figura 12), a fin de entender cómo interpretó teóricamente su actuar respecto de las aprehensiones operativas, las aprehensiones discursivas y los procesos configurales. Al ser cuestionado por el investigador sobre el inciso b) del problema de probar (interpretar su solución mediante el Modelo del Razonamiento Configural) FPM2 explicó que análogo al problema 2, dividió su solución en distintos momentos. En cada momento señaló las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y los procesos configurales.

El contraste que se realizó muestra lo siguiente:

Similitudes:

- Identificó como momentos en su proceso de solución el identificar elementos de la hipótesis en la figura, identificar elementos de los triángulos (lados y ángulos) e identificar relaciones entre los triángulos.
- Según el momento en su proceso de solución, señaló como aprehensiones discursivas el concepto de incentro, propiedad de paralelismo, concepto de triángulo, concepto de triángulo isósceles y la propiedad de suma de segmentos.
- Según el momento en su proceso de solución, señaló como aprehensiones operativas la identificación de elementos en las subconfiguraciones geométricas y el reconocimiento de relaciones entre los elementos de subconfiguraciones geométricas.
- Según el momento en su proceso de solución, señaló la relevancia de los procesos configurales para plantear conjeturas sobre relaciones entre los elementos de las subconfiguraciones geométricas.

Diferencias:

- No consideró como un momento en su proceso de solución el reconocimiento de subconfiguraciones geométricas a partir de la “descomposición” de la configuración geométrica inicial.
- No interpretó el planteamiento y prueba de la conjetura como un proceso configural.

El nivel que le corresponde respecto a la categoría de interpretar es el 3, en razón de que interpretó algunas de las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y algunos de los procesos configurales. Destacó su papel en el proceso de solución. Continúa interpretando las aprehensiones operativas como los pasos que realizó sobre la configuración geométrica, sin embargo, en muchas ocasiones los describió en relación con los conceptos y propiedades geométricas por ello su dificultad para reconocer los procesos configurales.

4.1.4. Problema de probar 4

FPM1 mostró un razonamiento diferente al de FPM2 y FPM3 durante la resolución al problema de probar en el sentido de que realizaron distintas aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales. Ambos razonamientos les permitió determinar una solución que satisfizo las exigencias del problema.

Del análisis a las producciones escritas y verbales de los FPM sobre los elementos que identificaron como claves para resolver el problema de probar y, su interpretación al proceso de solución se concluye sobre su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural, como se muestra en seguida.

4.1. 4.a. Futuro Profesor de Matemáticas I

Con base en el proceso de solución de FPM1 se reconoce el procedimiento siguiente:

1. Interpretó la hipótesis y tesis del enunciado del problema de probar.
2. Tradujo la información conocida a una representación geométrica conformada por circunferencias, segmentos de líneas rectas y puntos.
3. Identificó los elementos geométricos clave para su proceso de solución. Para ello relacionó los datos de la tesis con la representación de dos segmentos de línea recta.
4. Modificó la representación geométrica mediante trazos auxiliares (segmentos de línea recta). Estas modificaciones las realizó a fin de obtener una representación geométrica (rectángulo) que incluyó algunos de los segmentos de línea recta.
5. Concluyó igualdad entre segmentos de línea recta que se correspondían con los lados del rectángulo.
6. Regresó a la configuración geométrica inicial y “descompuso” los segmentos de línea recta mediante la suma de sus partes. Esto le permitió replantear las condiciones del problema y reconocer que la solución al problema de probar se traducía a probar una conjetura de equivalencia entre los segmentos.
7. Modificó la representación geométrica mediante trazos auxiliares (segmentos de línea recta). Estas modificaciones las realizó a fin de obtener una representación geométrica compuesta por dos triángulos que relacionó las nuevas condiciones del problema.
8. Probó que ambos triángulos son isósceles. Esto le permitió concluir que los lados de cada triángulo eran iguales en medida.
9. Modificó la representación geométrica de los triángulos isósceles mediante trazos auxiliares (segmentos de línea recta). Estas modificaciones las realizó a fin de “descomponer” cada triángulo en otros dos y con base en ello, relacionar los segmentos de línea de recta que servirían para probar la conjetura.
10. Relacionó los componentes de los nuevos triángulos obtenidos con la información conocida: dos lados homólogos congruentes y un ángulo homólogo congruente.
11. Reconoció que podía utilizar el criterio de congruencia de triángulos Ángulo-Lado-Ángulo y así demostrar que son congruentes.
12. Probó la conjetura de equivalencia entre segmentos a partir de relacionarlos con las bases de los triángulos congruentes.
13. Empleando todas las conclusiones, sustituyó los segmentos equivalentes en la relación de suma de segmentos y da solución al problema de probar.

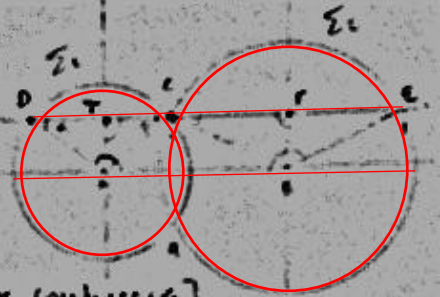

Lo que se destaca en la solución de FPM1 en este problema, es que el visualizar con que formas geométricas trabajar (rectángulo $TFBA$, triángulo ΔDAC y su “descomposición” en dos triángulos $\Delta DTA, \Delta CTA$) lo llevó al planteamiento de conjeturas ($\overline{TF} = \overline{AB}$ y $\overline{DT} = \overline{TC}, \overline{CF} = \overline{FE}$) que guiaron su forma de proceder para dar solución al problema.

Una vez que se analizó la forma de proceder de FPM1 en el problema de probar, se procedió a comprender el razonamiento que siguió en cada una de sus acciones utilizando elementos del Modelo del Razonamiento Configural.

En la Tabla 13 se muestra el análisis de su proceso de solución al problema de probar con base en el Modelo del Razonamiento Configural. Incluye evidencia escrita y verbal.

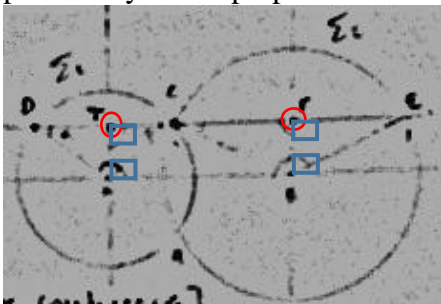
Tabla 13

Análisis del proceso de solución de FPM1 al problema de probar 4

Acción del resolutor	Aprehensión operativa	Aprehensión discursiva	Proceso configural
<p>Representa geoméricamente las condiciones del problema.</p>  <p><i>FPM1: Lo primero que realicé aquí fue construir la parte geométrica de lo que eran las hipótesis...trazamos las circunferencias que nos decían con centro en A y en B y además que estas fueran secantes entre sí, después el trazo a la recta paralela que pasara por C que fuera paralela a la recta AB.</i></p>	<p>Construye una configuración geométrica compuesta por: Dos circunferencias $\Sigma 1$ y $\Sigma 2$ Dos rectas \overline{AB} y \overline{DE} Esta construcción es una interpretación literal de las condiciones del problema.</p>	<p>Definición de circunferencia y concepto de posición Definición de rectas paralelas Concepto de puntos de intersección</p>	<p>La coordinación aprehensión discursiva/aprehensión operativa conlleva a tener una representación visual del problema de probar.</p>
<p>Traza segmentos auxiliares perpendiculares al segmento \overline{AB}</p>  <p><i>FPM1: Una de las primeras cosas que hice fue considerar trazos auxiliares...el primer trazo auxiliar que hice fue trazar una recta perpendicular que pasara por A..que fuera perpendicular a \overline{AB} y en la otra circunferencia hice lo mismo, la</i></p>	<p>Construye una subconfiguración geométrica compuesta por: Dos rectas perpendiculares</p>	<p>Recta perpendicular</p>	<p>La coordinación aprehensión discursiva/aprehensión operativa propicia construir una subconfiguración útil para la resolución del problema de probar.</p>

recta perpendicular a \overline{AB} y que pase por el punto B.

Asocia los elementos de la configuración geométrica y la subconfiguración geométrica por medio de la relación entre rectas paralelas y rectas perpendiculares.



FPM1: Entonces lo siguiente que hice fue identificar los puntos donde intersectaban esas rectas perpendiculares a la recta \overline{DE} que los llamé por un lado T, y por el otro lado F, a esos puntos. Una vez hecho eso, lo que hice fue utilizar un principio que nos decía que si tenemos un par de rectas paralelas y una recta perpendicular a una de ellas entonces, esa perpendicular también lo iba ser a la segunda recta...con esto lo que hice fue encontrar que estos ángulos, el ángulo con vértice en A y el ángulo con vértice en T eran ambos de 90° , esto por la propiedad que había establecido de perpendicularidad...

Identifica elementos de la subconfiguración geométrica y los marca.

Recta perpendicular
Relación entre recta paralela y recta perpendicular

La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva propicia relacionar elementos en una subconfiguración geométrica.

Asocia los elementos de la configuración geométrica y la subconfiguración geométrica por medio del concepto de rectángulo.



FPM1: Luego, utilicé la definición de rectángulo para ver que esta

Identifica una subconfiguración geométrica: Rectángulo $TFAB$
Descomponiendo la configuración y subconfiguración geométrica.

Propiedad de paralelismo y perpendicularidad
Concepto de rectángulo

La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva propicia identificar una subconfiguración útil para la resolución del problema de probar.

figura... la figura ATFB es un rectángulo... TFAB es un rectángulo

Reescribe las condiciones del problema de probar.

$$\overline{DC} = \overline{DT} + \overline{TC} \quad \text{y} \quad \overline{CE} = \overline{CF} + \overline{FE}$$

[una totalidad es igual a la suma de sus partes integrantes]

Transcripción de la imagen:

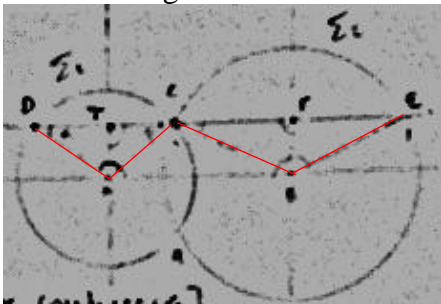
$$\overline{DC} = \overline{DT} + \overline{TC} \quad \text{y}$$

$$\overline{CE} = \overline{CF} + \overline{FE}$$

Principio, una totalidad es igual a la suma de sus partes integrantes.

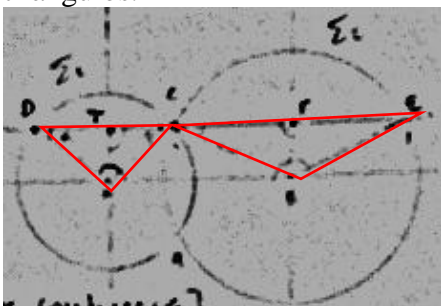
FPMI: Lo siguiente que hice fue ver que este segmento, que \overline{DC} , lo podíamos ver como la suma de \overline{DT} más \overline{TC} ... por el otro lado también, tenemos que el segmento \overline{CE} era igual a la suma de \overline{CF} y \overline{FE} .

Traza dos segmentos auxiliares



FPMI: Bueno... tracé segmentos auxiliares, que fue el segmento \overline{DA} y el \overline{AC} por un lado y por el otro lado, el \overline{CB} y el \overline{BE} .

Identifica una subconfiguración geométrica compuesta por triángulos.



FPMI: Con esos trazos por ejemplo si nos centramos en la primera

“Descompone” un segmento a partir de visualizar las partes que lo componen.

Longitud de un segmento suma

La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva conlleva a replantear las condiciones del problema de probar.

Realiza trazos auxiliares

Concepto de segmento de línea recta

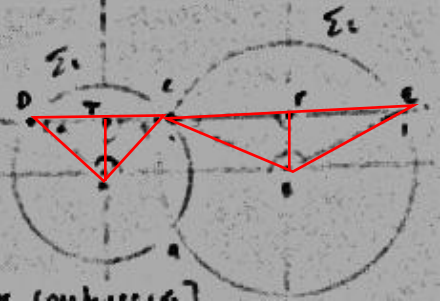
La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva conlleva a tener una subconfiguración útil para probar la conjetura de equivalencia entre segmentos de línea recta.

Segmentos de línea recta:
 \overline{AD} y \overline{AC}
 \overline{CB} y \overline{EB}

Visualiza figuras triangulares como una subconfiguración geométrica. $\triangle DAC$ y $\triangle CBE$

Concepto de triángulo
Lados y ángulos de un triángulo.

La coordinación aprehensión discursiva/aprehensión operativa conlleva a identificar una subconfiguración útil para probar la conjetura de triángulos isósceles.

<p>circunferencia que llamé épsilon 1, tenemos que se nos forma un triángulo primero, el triángulo ΔDAC ...</p>			
<p>Prueba que los triángulos son isósceles</p> <p><i>FPM1: ver que es un triángulo isósceles (Señala ΔCBE) donde este ángulo (señala ángulo en c) era igual con el de acá (señala el ángulo en E)</i></p>	<p>Relaciona elementos de una subconfiguración geométrica.</p>	<p>Concepto de triángulo isósceles.</p>	<p>La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva conlleva a la prueba de la conjetura de los triángulos isósceles.</p>
<p>Identifica triángulos como subconfiguraciones</p>  <p><i>FPM1: nos centramos en la circunferencia épsilon 1 y, observamos que ese triángulo que habíamos dicho que era isósceles ΔDAC, se podrían trazar o construir otros triángulos dentro, en este caso ΔDTA y ΔCEA aja, donde teníamos que ese triángulo (señala el ángulo $\angle DTA$) es de 90° y este también (señala el ángulo $\angle CAT$)</i></p>	<p>Descompone una subconfiguración geométrica de un triángulo en dos triángulos.</p> <p>ΔDAT y ΔCAT ΔCBF y ΔEBF</p>	<p>Concepto de triángulo</p> <p>Concepto de triángulo isósceles</p>	<p>La aprehensión operativa/aprehensión discursiva conlleva a identificar una subconfiguración útil que sugiere la solución al problema de probar mediante la validación de la conjetura de equivalencia entre segmentos de línea recta.</p>
<p>Prueba la congruencia de triángulos</p> <p>$\Delta (DTA)$ y (CTA)</p> <p>$\overline{DA} = \overline{AC}$ [radios de Σ.]</p> <p>$\angle DAT = \angle CAT$ [Suma ang. adyacentes]</p> <p>\overline{TA} común</p> <p>$\therefore \Delta (DTA) \cong (CTA)$</p> <p><i>FPM1: Una vez observados estos triángulos que tenemos ahí, observamos que tenemos un lado igual, este de aquí (lado \overline{DA}) con el de acá (lado \overline{AC}), además, este otro lado de aquí (señala \overline{AT}) era común...me faltó mencionar que este</i></p>	<p>Relaciona elementos de las subconfiguraciones: Radios de la circunferencia con los lados de los triángulos</p>	<p>Suma de los ángulos internos de un triángulo</p> <p>Radios de una circunferencia</p> <p>Concepto de perpendicularidad</p> <p>Criterio de congruencia</p>	<p>La coordinación aprehensión operativa/aprehensión discursiva conlleva a probar que los triángulos son congruentes.</p>

ángulo (señala $\angle EAD$) era igual con este otro de acá (señala ángulo $\angle CAT$)

<p>Establece una relación de congruencia entre los segmentos de línea recta. <i>FPM1: lo que hice fue obtener lo que me interesaba que fue encontrar que el segmento \overline{DT} era igual con el \overline{TC}.</i></p>	<p>Identifica elementos de la subconfiguración mediante su descomposición:</p>	<p>Concepto de triángulos congruentes.</p>	<p>La coordinación operativa/aprehensión discursiva propicia probar equivalencia en la medida de las bases.</p>
---	--	--	---

Bases de triángulos congruentes
 $\overline{DT} = \overline{TC}$
 $\overline{CF} = \overline{FE}$

Prueba la relación doble de \overline{AB} respecto a \overline{DE}

Podemos notar que $\overline{DE} = (\overline{DT} + \overline{TC} + \overline{CF} + \overline{FE}) = \overline{DT} + \overline{CF}$
 • Principio: A una sola o pocas integrales
 • Propiedad asociativa
 $\overline{DE} = 2 \overline{TC} + 2 \overline{CF}$
 $= 2 (\overline{TC} + \overline{CF})$ Prop. distributiva
 $\overline{DE} = 2 (\overline{AE})$

Se identifican elementos de la configuración: segmentos, y se visualiza su descomposición

Longitud de un segmento suma Propiedad transitiva

La coordinación operativa/aprehensión discursiva conlleva a la solución al problema de probar.

FPM1: Eso nos sirvió o nos ayudó para establecer lo siguiente: que el segmento \overline{DC} era igual a dos veces \overline{TC} ...con estas equivalencias lo que podemos notar es lo siguiente, si observamos el segmento grande \overline{DE} lo podemos ver como la suma de este segmento \overline{DT} más \overline{TC} más \overline{CF} y, finalmente más \overline{FE} entonces, sustituyendo las equivalencias que encontramos anteriormente, lo que hicimos fue asociar aquí y ver que el segmento $\overline{DT} + \overline{TC} = \overline{DC}$ luego $\overline{CF} + \overline{FE} = \overline{CE}$ entonces, lo que hice fue asociar y dejarlo en estos términos de $\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE}$ sí, luego... para finalmente... para llegar por lo construido...llegábamos a que el segmento \overline{DE} , este grande, era igual a dos veces \overline{TC} más dos veces \overline{CF} ...factorizamos ese dos y lo dejamos como \overline{TC} y \overline{CF} ... $\overline{TC} + \overline{CF} =$

\overline{AB} y llegamos a lo que queríamos encontrar.

Del análisis de su proceso de solución, los elementos que *identificamos* como relevantes fueron:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: circunferencias secantes, rectas paralelas y perpendiculares, concepto de rectángulo, concepto de triángulo isósceles, congruencia de triángulos y longitud de un segmento suma.
- Modificaciones sobre la figura: trazos auxiliares, identificación de subconfiguraciones geométricas (rectángulo y triángulos).

Estos elementos fueron contrastados con aquellos que FPM1 identificó del análisis que realizó a su proceso de solución. Al ser cuestionado por el investigador sobre su respuesta al inciso a) del problema (identificar elementos relevantes en su resolución) FPM1 destacó:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: concepto de rectángulo, circunferencia, circunferencias secantes, propiedad de perpendicularidad, relaciones entre rectas paralelas y rectas perpendiculares, suma de ángulos interiores, criterio de congruencia y concepto de segmento suma.
- Modificaciones sobre la figura: trazos de rectas perpendiculares e identificación de subconfiguraciones geométricas.

Este contraste permitió reconocer que FPM1 identificó los conceptos y las propiedades geométricas que utilizó en su proceso de solución, así como las modificaciones que realizó sobre la configuración geométrica que construyó inicialmente. Por lo que realizó, el nivel que le corresponde respecto a la categoría de identificar es el 3.

Siguiendo con la segunda categoría de análisis, *interpretar*, FPM1 evidenció una interpretación teórica detallada sobre su proceso de solución al interpretar teóricamente las aprehensiones operativas, las aprehensiones discursivas y los procesos configurales (Véase Figura 13).

	A.O	A.D	P. Congru.
1	<ul style="list-style-type: none"> • Trazos de circunf. secantes • Trazos de segm • Trazos de segm. Arcos de la recta 	<ul style="list-style-type: none"> • Def. Circunferencia • Def. Circunf. secantes • Def. segm • Def. rectas paralelas 	<p>Observar los elementos de la tesis, lo que queremos demostrar.</p>
2	<ul style="list-style-type: none"> • Trazos auxiliares e identificación de puntos (rectas Perpendiculares) 	<ul style="list-style-type: none"> • Def. rectas perpendiculares • Def. de punto como intersección de 2 rectas 	<ul style="list-style-type: none"> • Notar la Existencia de un Rectángulo
3	<ul style="list-style-type: none"> • Existencia de un Rectángulo • Identificación de elementos equivalentes 	<ul style="list-style-type: none"> • Def. rectángulo • Prop. $l_1 // l_2$ y $l_3 \perp l_1 \Rightarrow l_3 // l_2$ • Principio: Todo = suma de 2 int. enteros 	<ul style="list-style-type: none"> • Mostrar equiv. entre elementos, y que en un caso paralelo a la solución

Figura 13. Parte de la interpretación realizada por FPM1 a su proceso de solución.

El análisis sobre su proceso de solución (véase Tabla 13) fue contrastado con la interpretación que hizo sobre el mismo (véase Figura 13), a fin de entender cómo interpretó teóricamente su actuar respecto de las aprehensiones operativas, las aprehensiones discursivas y los procesos configurales. Al ser cuestionado por el investigador sobre el inciso b) del problema de probar (interpretar su solución mediante el Modelo del Razonamiento Configural) FPM1 explicó que dividió su proceso de solución en distintos momentos que refieren a los pasos ordenados que sigue para su solución. En cada momento señaló las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales.

El contraste que se realizó muestra lo siguiente:

Similitudes:

- Identificó ocho momentos en su proceso de solución que refieren a las acciones realizadas por el resolutor.
- Según el momento en su proceso de solución, señaló como aprehensiones discursivas la definición de circunferencia y de circunferencias secantes, la propiedad de perpendicularidad y de parte-todo, criterio de congruencia y la propiedad transitiva.

- Según el momento en su proceso de solución, señaló como aprehensiones operativas el realizar trazos iniciales, trazos auxiliares, identificar subconfiguraciones geométricas y visualizar la partición de segmentos.

Diferencias:

- No interpretó el planteamiento y prueba de conjetura como proceso configural.

Por lo que realizó, el nivel que le corresponde respecto a la categoría de interpretar es el 4, en razón de que realizó una interpretación detallada de su proceso de solución. FPM1 interpretó teóricamente todas las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas, no obstante, interpretó algunos de los procesos configurales, destacando su papel en la resolución del problema de probar.

Finalmente, se presenta la respuesta verbal de FPM1 al ser cuestionado por el investigador durante la entrevista, sobre sus conclusiones respecto a los elementos del Modelo del Razonamiento Configural (aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural):

FPM1: Una aprehensión operativa es como, con ciertos elementos que a nosotros nos dan, nosotros hacemos su construcción ¿no? hacemos su construcción geométrica y podemos, así como mentalmente moverlos, modificarlos, cambiarlos, cosas como esas... entonces, una aprehensión operativa es eso, mmm, ciertos elementos que nos están ofreciendo nosotros podemos modificarlos...los trazos auxiliares es como agregar algo es una modificación.

FPM1: La aprehensión discursiva es tratar de justificar porque realizamos ciertas modificaciones.

FPM1: Los procesos configurales es como un resultado después de observar esas modificaciones que hicimos y las definiciones que utilizamos... ver para que nos van a servir esas acciones que realizamos o ver cómo, en conjunto, qué es lo que nos están dando como resultado.

FPM1: (Respecto al Modelo del Razonamiento Configural) nos ofrece como un cierto orden ¿no? Cuando nosotros vamos a demostrar porque pues, creo que también, nos ayuda también a... esclarecer muchos, podría llamárseles estem... huecos que podrían quedarse en un proceso de demostración. Me está ayudando a esclarecer muchos detalles y ver un orden en la demostración.

A partir del análisis sobre su conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural (aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural), en relación con las destrezas de identificar e interpretar concluimos que FPM1 refiere al Modelo del Razonamiento Configural como un modelo que da orden a su proceder. Reconoce “pasos” que ha de seguir en su proceso de solución utilizando las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales. FPM1 se enmarca en el caso en el cual, el razonamiento para dar solución a un problema de probar sigue un mismo “orden”: analizar la configuración geométrica, emplear conceptos y propiedades geométricas, relacionar la configuración geométrica con los conceptos y propiedades geométricas, aun cuando esto no siempre se cumple.

4.1. 4.b. Futuro Profesor de Matemáticas 2

Con base en el proceso de solución de FPM2 se reconoce el procedimiento siguiente:

1. Interpretó la hipótesis y tesis del enunciado del problema de probar.
2. Tradujo la información conocida a una representación geométrica conformada por circunferencias, segmentos de líneas rectas y puntos.
3. Identificó los elementos geométricos necesarios para su resolución. Para ello visualizó una descomposición de segmento suma.
4. Relacionó la descomposición de segmento suma con cuatro segmentos de línea recta.
5. Modificó la representación geométrica mediante trazos auxiliares (radios de las circunferencias y segmentos de recta perpendiculares). Estas modificaciones las realizó a fin de obtener una representación geométrica conformada por cuatro triángulos, que incluyó los elementos de la descomposición del segmento suma con las bases de los triángulos.
6. Concluyó igualdad entre los ángulos de las bases de cada triángulo a partir del concepto de triángulo isósceles y la propiedad de rectas paralelas cortadas por una transversal.
7. Relacionó los componentes de los nuevos triángulos obtenidos con la información conocida: dos lados homólogos congruentes y un ángulo homólogo congruente.
8. Reconoció que podía utilizar el criterio de congruencia de triángulos Ángulo-Lado-Ángulo y así demostrar que son congruentes.
9. Probó la equivalencia entre segmentos a partir de relacionarlos con las bases de los triángulos congruentes.
10. Empleando todas las conclusiones, sustituyó los segmentos equivalentes en la relación de suma de segmentos y da solución al problema de probar.

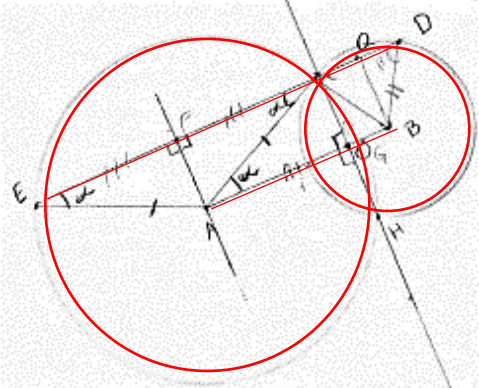
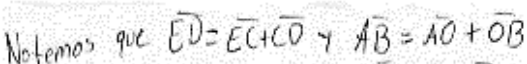
Lo que se destaca en la solución de FPM2 en este problema, es que el visualizar con que formas geométricas trabajar (triángulos ΔEAC y ΔCBD) y su “descomposición” en dos triángulos cada uno (ΔEAP , ΔCAP y ΔCBQ y DBQ , respectivamente), lo llevó a probar la congruencia entre segmentos ($\overline{EP} = \overline{PC} = \overline{AO}$ y $\overline{QD} = \overline{QC} = \overline{OB}$). Tales segmentos serían utilizados para reescribir un segmento suma y con ello, probar lo solicitado.

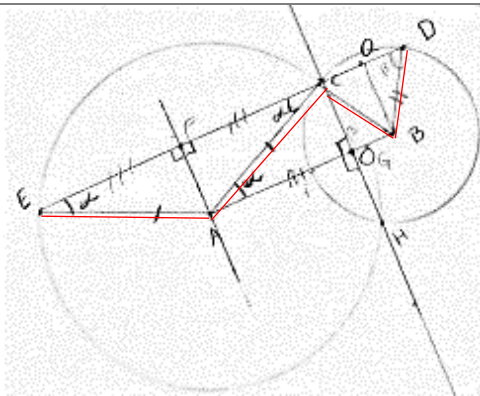
En consecuencia, de la forma de proceder de FPM2, hemos analizado su razonamiento utilizando los elementos del Modelo del Razonamiento Configural (aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural).

En la Tabla 14 se muestra el análisis de su proceso de solución al problema de probar con base en el Modelo del Razonamiento Configural. Incluye evidencia escrita y verbal.

Tabla 14

Análisis del proceso de solución de FPM2 al problema de probar 4

<p>Enunciado del problema: Sean dos circunferencias de centros A y B respectivamente, secantes en dos puntos distintos C y H. Por C se traza una paralela al segmento AB, que corta a las circunferencias en los puntos D y E. Prueba que \overline{DE} es dos veces \overline{AB}.</p>			
<p>Acción del resolutor</p>	<p>Aprehensión operativa</p>	<p>Aprehensión discursiva</p>	<p>Proceso configural</p>
<p>Representa geoméricamente las condiciones del problema.</p> 	<p>Construye una configuración geométrica compuesta por: Dos circunferencias con centro en A y B, respectivamente. Dos rectas \overline{AB} y \overline{ED} Esta construcción es una interpretación literal de las condiciones del problema.</p>	<p>Definición de circunferencias y concepto de posición</p> <p>Definición de rectas paralelas</p> <p>Concepto de puntos de intersección</p>	<p>La coordinación aprehensión discursiva/ aprehensión operativa conlleva a tener una representación visual del problema de probar.</p>
<p>Plantea una relación de segmento suma</p> 	<p>Descompone los segmentos de línea recta a partir de los segmentos de línea recta que lo conforman. $\overline{ED} = \overline{EC} + \overline{CD}$ $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$</p>	<p>Propiedad de segmento suma</p>	<p>La coordinación aprehensión operativa/a aprehensión discursiva conlleva a plantear una relación que oriente el proceso de solución.</p>
<p>Traza segmentos auxiliares (radios de cada circunferencia) para obtener dos triángulos.</p>	<p>Construcción de una subconfiguración geométrica</p>	<p>Concepto de radios de circunferencias</p> <p>Concepto de triángulo</p>	<p>La coordinación aprehensión</p>

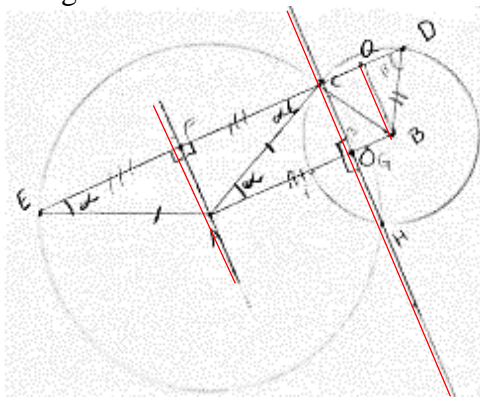


FPM2: Si trazamos los radios \overline{AE} , \overline{AC} , \overline{CB} y \overline{DB} y las perpendiculares a \overline{ED} que pasan por C , A y B obtenemos que hay triángulos auxiliares para ayudarnos a resolver el problema.

compuesta por dos triángulos: $\triangle EAC$ y $\triangle CBD$

discursiva/aprehensión operativa propicia construir una subconfiguración útil para la resolución del problema de probar.

Traza segmentos de recta auxiliares (perpendiculares) para descomponer los triángulos.



Construye una subconfiguración geométrica compuesta por triángulos: $\triangle EAF$, $\triangle CAF$, $\triangle COA$, $\triangle COB$, $\triangle QBC$ y $\triangle QBD$

Propiedad de perpendicularidad.

La coordinación prehensión discursiva/aprehensión operativa propicia construir una subconfiguración útil para la resolución del problema de probar.

Prueba la igualdad entre los ángulos de las bases de los triángulos.

Entonces $\angle ECA = \angle CEA = \angle CAB$ porque el triángulo ECA es isósceles y por ser paralelas cortadas por un transversal. De manera homóloga $\angle EDB = \angle DCB = \angle CBA$.

Transcripción de la imagen: Entonces $\angle ECA = \angle CEA = \angle CAB$ porque el triángulo ECA es isósceles y por ser paralelas cortadas por una transversal. De manera homóloga $\angle EDB = \angle DCB = \angle CBA$

Identifica elementos de la subconfiguración geométrica a partir de su descomposición: $\angle ECA$, $\angle CEA$, $\angle CAB$, $\angle EDB$, $\angle DCB$, $\angle CBA$

Propiedad de rectas paralelas cortadas por una transversal. Concepto de triángulo isósceles.

La coordinación prehensión discursiva/aprehensión operativa propicia relacionar elementos en una subconfiguración

			ración geométrica
<p>Prueba congruencia entre los triángulos.</p> <p><i>Por el criterio de congruencia A-L-A los triángulos EPA, PCA y CDA son congruentes (También los GDB, CQB y OBC)</i></p> <p>Transcripción de la imagen: Por el criterio de congruencia A – L – A los triángulos EPA, PCA y CDA son congruentes (También Δ'GDB, CQB y OBC)</p>	<p>Identifica elementos de la subconfiguración geométrica: Dos ángulos y un lado en cada triángulo</p>	<p>Concepto de congruencia de triángulos. Criterio de congruencia.</p>	<p>La coordinación prehensión operativa/a prehensión discursiva propicia establecer una relación de congruencia entre triángulos.</p>
<p>Relaciona los elementos homólogos de los triángulos congruentes.</p> <p><i>EP = PC = AO y QD = QC = OB</i></p>	<p>Identifica elementos de la subconfiguración geométrica mediante su descomposición: Lados de los triángulos</p>	<p>Concepto de congruencia de triángulos.</p>	<p>La coordinación prehensión operativa/a prehensión discursiva conlleva a establecer relaciones de equivalencia entre los lados de los triángulos.</p>
<p>Prueba la relación doble de \overline{AB} respecto de \overline{DE}</p> <p><i>Entonces $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = \overline{OB} + \overline{OB} = 2\overline{OB}$ $\overline{EC} = \overline{EP} + \overline{PC} = \overline{AO} + \overline{AO} = 2\overline{AO}$ $\therefore \overline{ED} = \overline{CD} + \overline{EC} = 2\overline{OB} + 2\overline{AO} = 2(\overline{OB} + \overline{AO}) = 2\overline{AB}$</i></p>	<p>Se identifican elementos de la configuración geométrica mediante su descomposición: Lados de los triángulos y segmento suma</p>	<p>Longitud de un segmento suma Propiedad transitiva</p>	<p>La coordinación prehensión operativa/a prehensión discursiva conlleva a la solución al</p>

Del análisis de su proceso de solución, los elementos que *identificamos* como relevantes fueron:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: circunferencias secantes, rectas paralelas y perpendiculares, concepto de triángulo isósceles, concepto de congruencia y criterios de congruencia de triángulos y longitud de un segmento suma.
- Modificaciones sobre la figura: trazos auxiliares, identificación de subconfiguraciones geométricas (triángulos) y sus elementos.

Estos elementos fueron contrastados con aquellos que FPM2 identificó del análisis que realizó a su proceso de solución. Al ser cuestionado por el investigador sobre su respuesta al inciso a) del problema (identificar elementos relevantes en su resolución) FPM2 identificó:

- Conceptos y propiedades geométricas utilizadas: circunferencias secantes, radios de la circunferencia, segmentos de recta perpendiculares, concepto de triángulo isósceles, propiedad de segmentos de recta paralelas, congruencia de triángulos, criterios de congruencia y longitud de un segmento suma.
- Modificaciones sobre la figura: trazos de radios en cada circunferencia, identificar triángulos como subconfiguraciones geométricas y sus elementos.

Este contraste permitió reconocer que FPM2 identificó los conceptos y propiedades geométricas que utilizó en su proceso de solución, así como las modificaciones que realizó sobre la configuración geométrica que construyó inicialmente. Por lo que realizó, el nivel que le corresponde respecto a la categoría de identificar es el 3.

Siguiendo con la segunda categoría de análisis, *interpretar*, el análisis sobre su proceso de solución (véase Tabla 14) fue contrastado con la interpretación que hizo sobre el mismo (Véase Figura 14), a fin de entender cómo interpretó teóricamente su actuar respecto de las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y los procesos configurales.

M	A O	A D	P C
1	Construcción de la figura	C. Circunferencias secantes C. Paralelas	Asociar el enunciado con una figura
2	Descomponer \overline{ED} en $\overline{EC} + \overline{CD}$, \overline{AB} en $\overline{AO} + \overline{OB}$	C. Segmentos y suma de segmentos	Identificar el camino
3	Trazar: $\overline{AE}, \overline{AC}, \overline{CB}, \overline{DB}$	C. radio	Buscar figuras geométricas que nos ayuden a resolver el problema
4	Trazar perpendiculares a \overline{ED} que pasen por C y por A, y por B	C. perpendicular	Construir Δ s auxiliares

Figura 14. Parte de la interpretación realizada por FPM2 sobre su proceso de solución.

Al ser cuestionado por el investigador sobre el inciso b) del problema de probar (interpretar su solución mediante el Modelo del Razonamiento Configural) FPM2 explicó que dividió su forma de proceder en ocho momentos, en cada momento interpretó su actuar respecto de las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y los procesos configurales.

El contraste que se realizó muestra lo siguiente:

Similitudes:

- Identificó ocho momentos en su proceso de solución, que refieren a las acciones realizadas por el resolutor.
- Según el momento en su proceso de solución, señaló como aprehensiones discursivas el concepto de circunferencias secantes, propiedad de paralelismo, concepto de suma de segmentos, concepto de radio, propiedad de perpendicularidad, relación entre rectas paralelas cortadas por una transversal, concepto de congruencia y criterios de congruencia.
- Según el momento en su proceso de solución, señaló como aprehensiones operativas la construcción de configuraciones y subconfiguraciones geométricas, la identificación de elementos en las subconfiguraciones y configuraciones geométricas.
- Identificó el papel de los procesos configurales en su proceso de solución.

El nivel que le corresponde respecto a la categoría de interpretar es el 5, en razón de que interpretó teóricamente todas las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y los procesos configurales. Así mismo, reconoció su papel en la resolución del problema de probar.

A partir del análisis sobre su conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural, en relación con las destrezas de identificar e interpretar concluimos que FPM2 refiere al Modelo del Razonamiento Configural como un modelo para entender el actuar de una persona al resolver un problema de probar en geometría. Este Modelo le permite entender el

razonamiento que guía el proceso de solución al identificar la aprehensión operativa, aprehensión discursiva y el proceso configural.

FPM2 identificó como aspectos relevantes las modificaciones sobre las figuras y los conceptos y propiedades que emplea para justificar tales modificaciones. Interpretó teóricamente a las modificaciones como aprehensiones operativas, a los conceptos y propiedades como aprehensiones discursivas y a la relación entre estos como procesos configurales. Además, reconoció el papel de los procesos configurales en el proceso de solución de un problema de probar.

4.2 Toma de decisiones de FPM sobre la comprensión de estudiantes

Las decisiones que tomaron los FPM sobre la comprensión que evidenciaron estudiantes de secundaria al resolver problemas de probar, se analizaron con base en los elementos del Modelo del Razonamiento Configural (aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural). En ese contexto, los FPM debían:

1. Identificar los elementos relevantes en los procesos de solución de estudiantes de secundaria al resolver problemas de probar en geometría.
2. Interpretar teóricamente los razonamientos de estudiantes de secundaria al resolver problemas de probar. Tal interpretación sería utilizando el Modelo del Razonamiento Configural (aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales).
3. Argumentar sobre sus decisiones con base en la interpretación sobre su razonamiento (2).

Para evidenciar la destreza de toma de decisiones en los FPM en relación con su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural, se emplearon las Categorías de análisis para la destreza de toma de decisiones (Véase Tabla 9).

Estas categorías de análisis se utilizaron una vez que se describió el proceso de solución de los FPM a la tarea profesional. Y, su uso nos permitió concluir sobre la toma de decisiones de FPM en relación con su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural.

4.2.1. Tarea profesional

Las producciones escritas y verbales de los FPM evidenciaron el análisis que realizaron sobre los razonamientos de estudiantes de secundaria al resolver problemas de probar en geometría y, que los llevó a tomar decisiones. Asimismo, de su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural en relación con su interpretación al proceso de solución de problemas de probar, en el que identificaron elementos claves que refieren a las aprehensiones operativas y a las aprehensiones discursivas.

La forma en la que los FPM tomaron decisiones fue distinta, en razón de la forma en que refieren a los elementos del Modelo del Razonamiento Configural, como se observa a continuación.

4.2. 1.a. Futuro Profesor de Matemáticas 1

La primera situación de enseñanza de la prueba en geometría demandó el análisis de un diálogo entre un profesor y un alumno de secundaria. El análisis revelaba que el estudiante había seguido un razonamiento inadecuado durante su resolución al problema de probar.

En este contexto, FPM1 explicó que el razonamiento del alumno era inadecuado al considerar una representación de un caso particular del problema de probar.

FPM1: El alumno se quedó con ese caso particular que se tenía que era el de acá (señala la representación geométrica inicial) y...hizo su demostración de que esos ángulos eran iguales...el A con el B, esto de acuerdo con la imagen que tenemos acá...lo primero que hizo fue remitirse a la definición de un rectángulo...en este caso tenemos un rectángulo y ahí utilizó una propiedad que se conoce que, cuando se intersectan sus diagonales, en un rectángulo...sus diagonales se bisecan de ahí pues, lo que encontró fue la equivalencia entre los segmentos, aja, entre los lados...a partir de ahí justificó que iban a ser equivalentes los ángulos.

FPM1, primeramente, analizó el razonamiento del alumno sobre el proceso de solución al problema de probar, al momento en que lo explicó al profesor. Para explicar bajo qué condiciones el razonamiento del estudiante era válido, FPM1 propuso un proceso de solución al problema de probar. Según FPM1 el alumno:

- Analizó la representación geométrica inicial en conjunto con la hipótesis y tesis del enunciado a probar.
- Visualizó que los datos de la hipótesis y de la tesis del problema se correspondían con una subconfiguración geométrica de un rectángulo, que le sería útil para su solución.
- Identificó elementos del rectángulo: sus diagonales.
- Empleó la propiedad de las diagonales de un rectángulo para concluir que las “partes” que conforman las diagonales son iguales.
- Relacionó “las partes” de las diagonales con lados de dos triángulos.
- Concluyó que los lados de ambos triángulos eran iguales y, por consiguiente, sus ángulos también, tesis del problema.

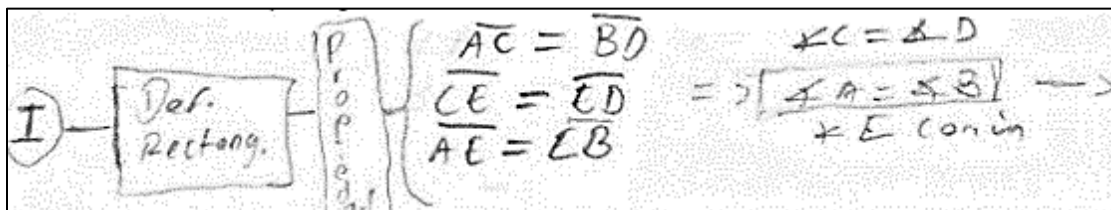


Figura 15. Explicación del razonamiento del alumno, según FPM1.

FPM1 notó que el proceso de solución del alumno refiere a un caso particular del problema de probar. Con base en ello, decidió responder al alumno mediante un caso general que se

correspondiera con el enunciado del problema de probar y que contradijera el razonamiento del estudiante. Su respuesta se describe en seguida.

FPM1: Lo que hice fue olvidarnos un poco de la imagen que se había dado y, construir a partir de los datos que nos están dando con la modificación o la aclaración que hizo en este caso, el maestro. Si nosotros ponemos ahora la construcción que hicimos a partir de la hipótesis, la siguiente representación...y ahora lo que tenemos es que no se cumple lo que había demostrado el compañero (refiriéndose al alumno).

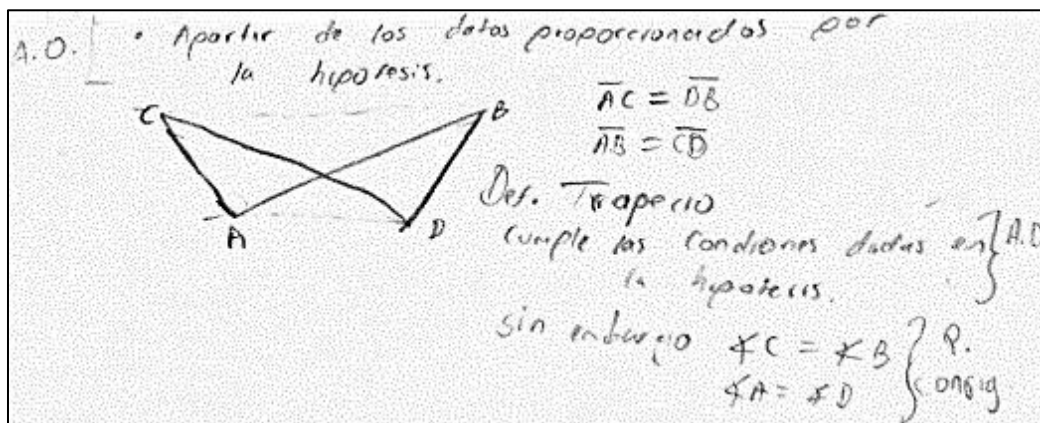


Figura 16. Decisión de FPM1 ante el razonamiento evidenciado por el alumno.

Para refutar la afirmación del alumno sobre el problema de probar (los segmentos de línea recta se bisecan), FPM1 propuso una configuración geométrica que cumpliera con las modificaciones que solicita el profesor (“en el problema número 8 siguiente tienes que corregir la tesis ya que solo podemos deducir que $\angle A$ es congruente con $\angle D$ ”). FPM1 enfatizó que el alumno debía en primera instancia, entender la información proporcionada por la hipótesis del problema y luego traducirla a una configuración geométrica (indica que ello refiere a una aprehensión operativa). Considera que, en un segundo momento, el alumno debió asociar los conceptos y propiedades geométricas a la configuración geométrica (indica que refiere a una aprehensión discursiva) y finalmente, probar la tesis del problema, relacionando la configuración geométrica con los conceptos y propiedades geométricas (indica que ello evidencia un proceso configural).

Concluimos que FPM1 tomó su decisión de cómo responder al alumno, a partir de entender bajo qué contexto el razonamiento del estudiante era válido, para ello identificó como aspectos claves en su proceso de solución:

- La representación geométrica inicial y su modificación (rectángulo).
- Propiedades y conceptos geométricos (concepto de rectángulo y propiedad de diagonales de un rectángulo).

Y, propuso la aprehensión operativa, aprehensión discursiva y el proceso configural que el estudiante debía realizar para dar una solución satisfactoria al problema de probar. Su forma de proceder ante el actuar del estudiante, refiere al Modelo del Razonamiento Configural,

como una herramienta que brinda un orden en el proceso de prueba: Aprehensión operativa → Aprehensión discursiva → Proceso configural.

Respecto a la segunda situación de enseñanza de la prueba en geometría que los FPM analizaron y en la cual se les demandó explicar los razonamientos de dos estudiantes (estudiante 1 y estudiante 2) a un mismo problema de probar. Su análisis debía revelar que ambos estudiantes habían seguido razonamientos inadecuados durante su resolución al problema de probar. Al respecto, los FPM debían diseñar una secuencia de al menos tres tareas para guiar a cada uno de estos estudiantes, en su razonamiento hacia la solución del problema de probar.

En el caso de FPM1, diferenció los razonamientos entre los estudiantes a partir de las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y los procesos configurales que realizaron en su solución. En el razonamiento del estudiante 1, FPM1:

Respuesta de estudiante 1. Identificó que el estudiante se centró en modificar la representación geométrica inicial a un caso particular (aprehensión operativa) que cumple con las condiciones de la hipótesis. Así también, reconoció que no justificó la modificación que hizo sobre la representación geométrica, mediante propiedades o conceptos geométricos (aprehensión discursiva) lo cual, no le permitió demostrar la tesis requerida (proceso configural).

FPM1: Como que observé que él lo hizo para un caso particular...el caso cuando las circunferencias eran iguales o con el mismo radio... creo que confundió o no sabía la definición de que fueran secantes ¿no? para este caso particular (señala dos circunferencias tangentes con el mismo radio) tenemos que aquí (señala la unión de los radios) esta recta... igual cumple las condiciones, sin embargo, como que se sale de la generalidad del hecho de que sean paralelas.

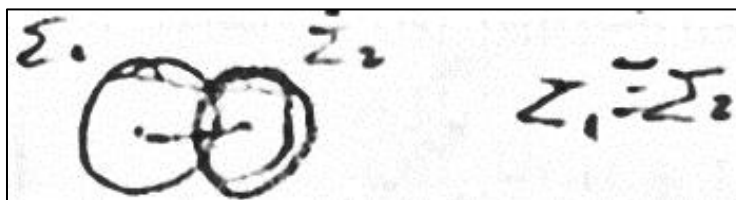


Figura 17. Representación de FPM1 de dos circunferencias con el mismo radio.

De forma análoga a la situación de enseñanza anterior, FPM1 analizó el actuar del estudiante buscando un contexto en el cual tuviera sentido su razonamiento. Esto le permitió reconocer que el estudiante 1 atendió a una representación geométrica de un caso particular del problema de probar en el cual las circunferencias tienen el mismo radio y que también, desconocía el concepto de circunferencias secantes.

A partir de lo anterior, FPM1 interpretó el razonamiento seguido por el estudiante 1 utilizando el Modelo del Razonamiento Configural. Concluyó que el estudiante 1 se basó únicamente en la figura y en sus modificaciones, sin utilizar las propiedades y la información proporcionada por la hipótesis del problema. Consecuentemente, la coordinación entre las

modificaciones y la justificación no le permitió obtener una solución adecuada al problema de probar. Según FPM1, esto se corresponde a la aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural, respectivamente.

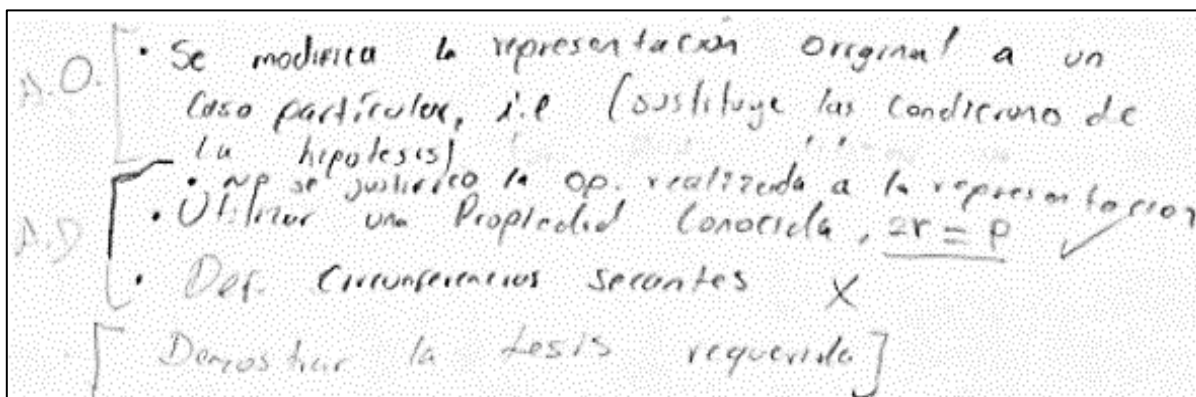


Figura 18. Interpretación de FPM1 al razonamiento del estudiante 1.

En relación con el razonamiento del estudiante 2, FPM1:

Respuesta de estudiante 2. Identificó que el estudiante se centró en modificar la representación geométrica inicial (aprehensión operativa) pero no realizó las justificaciones adecuadas (aprehensión discursiva). Por tanto, reconoció que el estudiante no logró demostrar la tesis requerida (proceso configural).

FPM1: Para el segundo estudiante, lo que él empezó hacer fue construcciones auxiliares, pero de alguna manera como que no las fue justificando y...eso también le provocó que se fuera como enredando en lo que quería encontrar o...lo que quería lograr.

De forma análoga al estudiante 1, FPM1 analizó el actuar del estudiante 2 buscando un contexto en el cual tuviera sentido su razonamiento. Esto le permitió reconocer que el estudiante 2 tiene un sobre apoyo en lo que visualiza al no realizar las justificaciones adecuadas.

A partir de lo anterior, FPM1 interpretó el razonamiento seguido por el estudiante 2 con base en el Modelo del Razonamiento Configural. Identificó que el estudiante 2 realizó construcciones auxiliares sin apoyo de propiedades que justificaran su proceder. Este estudiante prolonga un segmento de recta y visualiza la suma de segmentos, pero no considera las definiciones y propiedades convenientes. Lo anterior, proporciona la idea intuitiva de la prueba. Según FPM1, esto se corresponde a la aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural, respectivamente.

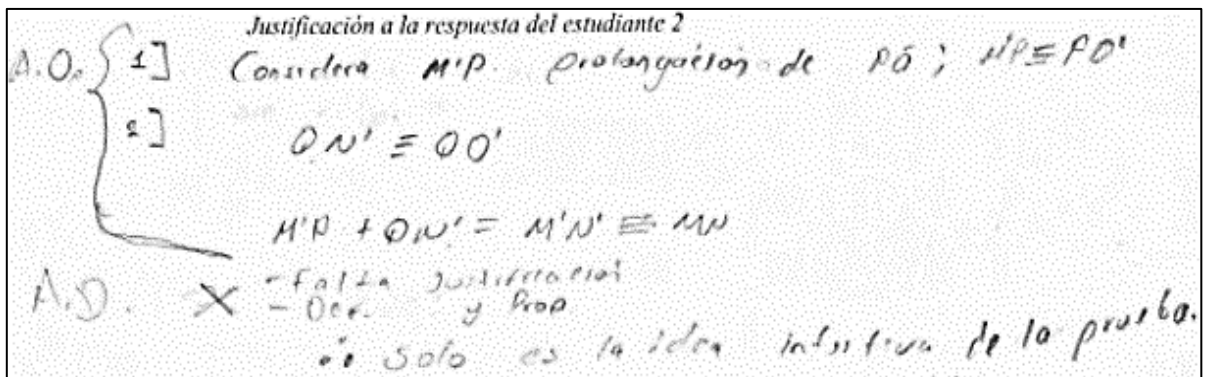


Figura 19. Interpretación de FPM1 al razonamiento del estudiante 2.

Lo que se evidencia en lo realizado por FPM1 es que su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural lo ayudó a:

- Interpretar lo que realizaron los estudiantes a partir de la aprehensión operativa, aprehensión discursiva y el proceso configural.
- Disponer de una guía que orienta el proceso de solución al problema de probar. En la que los conceptos y propiedades geométricas y las modificaciones sobre la figura juega un papel clave.

Consecuente al análisis de los razonamientos de los estudiantes 1 y 2, FPM1 concluyó que ninguno logró una solución adecuada al problema de probar. Por una parte, el estudiante 1 no realizó modificaciones pertinentes a la configuración geométrica inicial y, por otra, el estudiante 2, a pesar de que realizó modificaciones pertinentes a la configuración geométrica inicial, no logró asociar las propiedades geométricas necesarias para dar solución al problema de probar.

Siguiendo con el diseño de la secuencia de tareas, para el estudiante 1, FPM1 propuso lo siguiente:

1. Construcción de distintas circunferencias. Según su interpretación, el estudiante se limitó a circunferencias con las mismas características por lo que requiere explorar distintas representaciones y a partir de ello, identificar propiedades.
2. Investigar la definición de circunferencias secantes y tangentes y trazo de las mismas. Según su interpretación, el primer estudiante carece de conocimiento sobre tales circunferencias por lo cual, es necesario explorar sobre ello.
3. Trazar y analizar configuraciones geométricas que sean útiles en la resolución del problema de probar. Según su interpretación, el estudiante requiere conocer otras configuraciones geométricas que contribuyan a visualizar modificaciones en la configuración geométrica inicial del problema de probar.

En lo realizado por FPM1, la tarea 1 refiere a aprehensiones operativas, la tarea 2 a aprehensiones discursivas y la tarea 3 a procesos configurales. Todos ellos involucrados al resolver el problema de probar. En relación con su conocimiento antecedente sobre el Modelo del Razonamiento Configural, consideró como aspectos guía el conocimiento sobre

definiciones y propiedades (aprehensión discursiva), la realización de trazos o modificaciones a representaciones geométricas (aprehensión operativa) y las relaciones que se pueden establecer entre estas (proceso configural).

Respecto al diseño de la secuencia de tareas, para el estudiante 2, FPM1 propuso lo siguiente:

1. Deducir propiedades de la circunferencia e investigar sobre rectas paralelas. Según su interpretación, este estudiante carece de un conocimiento sobre las propiedades y conceptos que están involucrados en la resolución del problema de probar.
2. Realizar trazos en las circunferencias. Aporta a sugerir nuevas configuraciones geométricas
3. Conocer triángulos congruentes y criterios de congruencia, utilizar los criterios de congruencia en representaciones geométricas y deducir relaciones entre triángulos a partir de su congruencia. Según su interpretación, el estudiante no fue capaz de relacionar la representación y sus modificaciones con conocimientos geométricos.

En este caso, la tarea 1 refiere a aprehensiones discursivas, la tarea 2 a aprehensiones operativas y la tarea 3 a procesos configurales. Todos ellos involucrados al resolver el problema de probar. En relación con su conocimiento antecedente sobre el Modelo del Razonamiento Configural, consideró como aspectos guía el conocimiento sobre definiciones y propiedades (aprehensión discursiva), la realización de trazos o modificaciones a representaciones geométricas (aprehensión operativa) y las relaciones que se pueden establecer entre estas (proceso configural). Además, su forma de intervención sigue un camino ordenado para llegar a la solución del problema de probar.

Por lo que realizó, el nivel que le corresponde respecto a la categoría de tomar decisiones es el 3, en razón de que toma decisiones con base en las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales.

Finalmente, al ser cuestionado por el investigador sobre la utilidad del Modelo del Razonamiento Configural, FPM1, mencionó:

*FPM1: Yo considero que el modelo, sigo con la idea de que, nos da un **orden** de cómo podemos trabajar un proceso de demostración y, de alguna manera, aclarar todos aquellos “huecos” que podrían llegar entre un paso de demostración a otro. Entonces... lo que pasó aquí (señala la respuesta del estudiante 1) fue eso precisamente, bueno lo vi más en el caso del segundo estudiante... lo que podemos observar es que a pesar de que logra hacer construcciones auxiliares que también considero que es una tarea un poco complicada estem...sin embargo, a partir de esas construcciones auxiliares no logramos ver esas propiedades ¿no? O esas definiciones entonces, de alguna manera ese modelo nos está proponiendo una base para, en el caso de una prueba, se supone que tenemos que partir, a partir de...construcciones o modificaciones que realizamos sobre una construcción luego nos debe llevar al establecimiento de ciertas justificaciones... y, eso pues nos dejaría ver la relación que existe entre las modificaciones o justificaciones que nosotros*

hagamos para llegar a proponer pues un camino para hacer una demostración o una prueba o incluso ver otras propiedades.

El análisis sobre las respuestas de FPM1 a los Problemas de Probar (PP) y Tareas Profesionales (TP) evidenció el desarrollo de la competencia mirar el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría (I: Identificar, In: Interpretar, TD: tomar decisiones) a partir de lo que conoce sobre el Modelo del Razonamiento Configural, como sigue:

Tabla 15

Desarrollo de la mirada profesional de FPM1 y su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural

PP o TP	I	In	TD	Conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural de FPM1
P1	N2	N2	-	<p>Aprehensión operativa: operaciones sobre la figura.</p> <p>Aprehensión discursiva: argumentación sobre las operaciones sobre la figura.</p>
P2	N2	N3	-	<p>Aprehensión operativa: manipulaciones sobre las representaciones geométricas.</p> <p>Aprehensión discursiva: justificación del porque se utilizan propiedades o conceptos en relación con la figura.</p> <p>Proceso configural: Realizar las aprehsiones operativas y aprehsiones discursivas al mismo tiempo</p>
P3	N3	N4	-	<p>Aprehensión operativa: manipulaciones sobre las representaciones geométricas</p> <p>Aprehensión discursiva: justificación del porque se utilizan propiedades o conceptos</p> <p>Proceso configural: Realizar las aprehsiones operativas y aprehsiones discursivas al mismo tiempo destacando su papel en la resolución.</p>
P4	N3	N4	-	<p>Aprehensión operativa: construcción de configuraciones geométricas y sus modificaciones de forma escrita o mental.</p>

Aprehensión discursiva: justificación mediante propiedades o conceptos de las construcciones o modificaciones de configuraciones geométricas.

Proceso configural: Acción en conjunto de las aprehensiones operativas y aprehensiones discursivas. Destacar el papel de tales acciones en conjunto para la resolución del problema de probar.

Modelo del Razonamiento Configural: Modelo que da un orden a los razonamientos que se siguen al resolver un problema de probar en geometría.

TP - - N3 Aprehensión operativa: construcción de configuraciones geométricas y sus modificaciones de forma escrita o mental.

Aprehensión discursiva: justificación mediante propiedades o conceptos de las construcciones o modificaciones de configuraciones geométricas.

Proceso configural: Acción en conjunto de las aprehensiones operativas y aprehensiones discursivas. Destacar el papel de tales acciones en conjunto para la resolución del problema de probar.

Modelo del Razonamiento Configural como un modelo que da un orden en la forma de razonar al resolver un problema de probar en geometría mediante la estructura:

Se parte de una representación, se modifica (aprehensión operativa) luego, se reconocen ciertas propiedades o definiciones, las justificaciones (aprehensión discursiva) y finalmente, se relacionan (proceso configural).

Describimos su mirada profesional ante su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural como sigue:

Cuando FPM1 se enfrentó a una situación de progresión en el aprendizaje de la prueba en geometría, primeramente, propuso un contexto bajo el cual tuviera sentido el razonamiento evidenciado por el estudiante. En tal contexto, identificó las configuraciones y subconfiguraciones geométricas y los conceptos y propiedades geométricas que son claves en su proceso de solución. Consecuentemente, interpretó teóricamente las modificaciones sobre la representación geométrica como aprehensiones operativas y las justificaciones mediante conceptos y propiedades geométricas como aprehensiones discursivas. Estas dos interpretaciones las relacionó teóricamente mediante los procesos configurales.

Lo anterior, le permitió concluir acerca de los aspectos que desde una forma de proceder que FPM1 considera válida, “faltan” en la forma de razonar del estudiante. Tales aspectos se enmarcan en el orden siguiente: Aprehensión operativa → Aprehensión Discursiva → Proceso configural. Así, toma decisiones que “completan” el orden que se sigue en un proceso de prueba válido.

La Figura 20 muestra lo antes descrito:

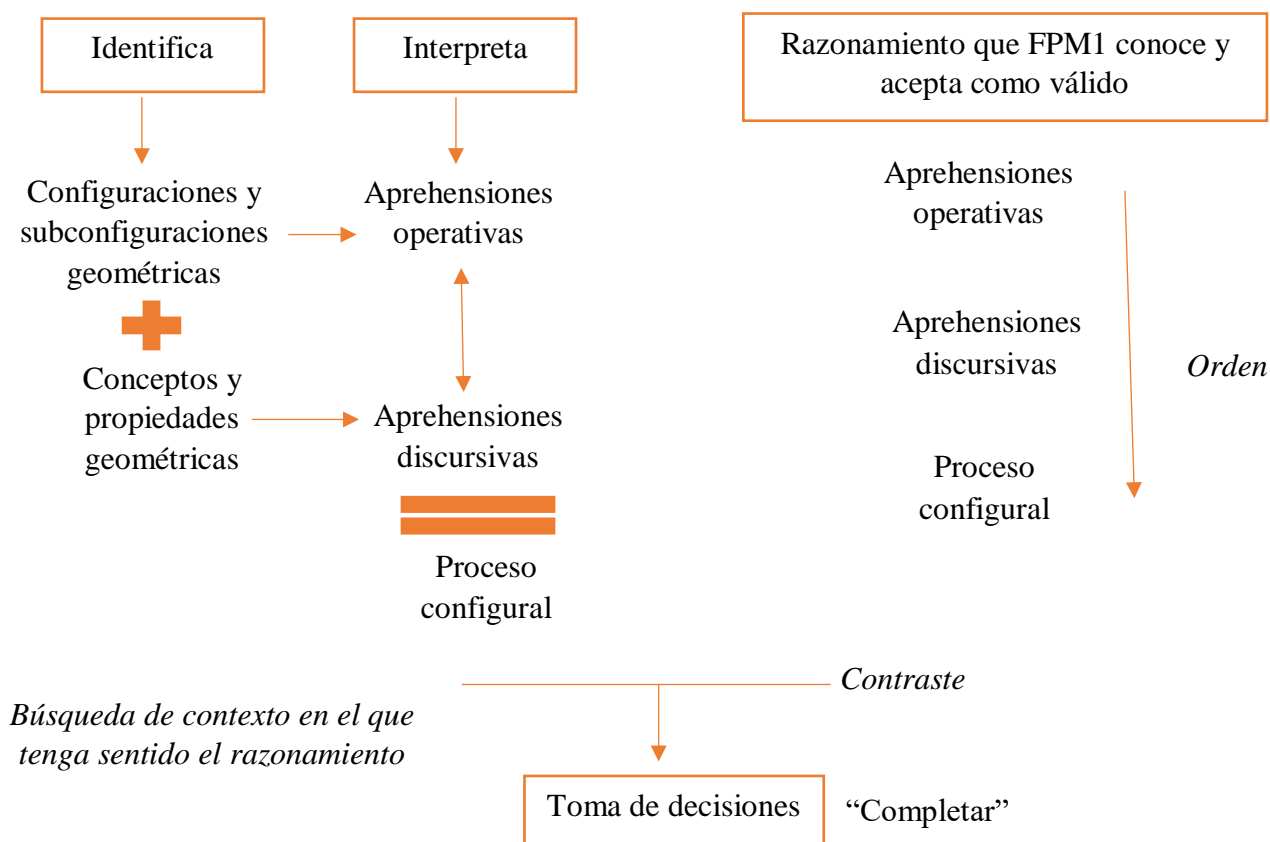


Figura 20. Mirada profesional de FPM1.

*FPM1: El hecho de yo haberlo resuelto con ese modelo me hizo más evidente esos problemas que existían, por ejemplo, en el primer caso pues se logra como que hacer ver propiedades, sin embargo, pues **hacen falta** hacer ciertos trazos. Y. en la segunda se logran hacer esos trazos, pero **no se logran** ver esas propiedades...en el caso de la geometría (refiriéndose al Modelo del Razonamiento Configural) es el ejemplo donde podemos utilizarlo...lo que yo realizaba cuando tenía un problema era... tenemos la figura y hacer estem... llegar nada más de las equivalencias que puede uno utilizar y finalmente, llegar a la demostración pero, a veces, me quedaba el problema de que cuando volvía a revisar eso que yo había hecho me perdía un poco en el sentido de que no sabía yo como había llegado a cierta equivalencia o cierta igualdad y pues a veces, tenía yo que volver a empezar desde el inicio, volver a empezar con la representación original y volver hacia adelante y de alguna manera no me servía...y*

el modelo nos está dando una base de que pues estamos partiendo de una representación, la modificamos luego, vemos ciertas propiedades o definiciones, las justificaciones y esa relación que estamos observando entre esas dos...creo que si serviría como una base para comprender lo que estamos haciendo.

4.2. 1.b. Futuro Profesor de Matemáticas 2

Respecto a la primera situación de enseñanza de la prueba, FPM2 explicó que el razonamiento del alumno era inadecuado al basar su justificación en elementos visuales.

FPM2: Yo creo que el alumno pensó que estos dos segmentos (Señala el segmento \overline{AC} y el segmento \overline{DB}) son paralelos cosa que el problema no dice y tal vez lo pensó así porque en el dibujo (Véase Figura 21) parece que sean paralelos...no sé si por azares del destino sean o no...pero aquí en el dibujo parece que \overline{CA} y \overline{BD} son paralelos entonces, si estos fueran paralelos tendría razón porque si se cortan por una transversal (señala el segmento \overline{AB}) los ángulos alternos internos son iguales...

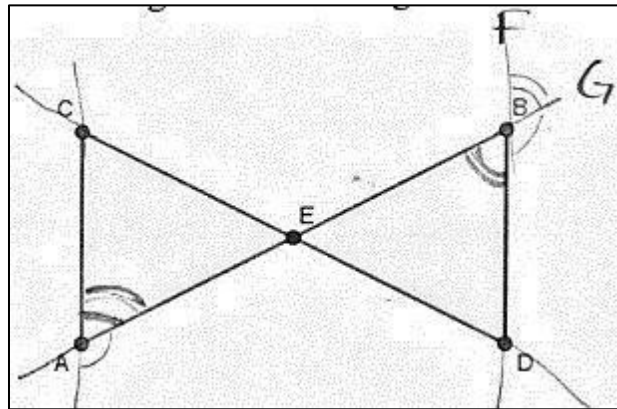


Figura 21. Modificaciones de FPM2 a la representación geométrica del enunciado para explicar el razonamiento del estudiante.

El investigador cuestionó a FPM2 sobre la afirmación del alumno “ $\angle A$ y $\angle B$ son congruentes, puesto que los segmentos \overline{AB} y \overline{CD} se bisecan”. Ante lo cual, no evidenció un entendimiento sobre el término “bisecan”.

FPM2: Yo creí que utilizaban este término (refiriéndose a la palabra bisecan) para decir que se cortaban por una transversal. Pues, está basado en lo visual porque no dice en ningún lado también que esos dos segmentos sean iguales (señala \overline{CE} y \overline{ED}) dice que la suma, bueno no la suma sino todo el segmento si es igual, pero no que este cortado en un punto estratégico (señala el punto E).

Análogo a FPM1, FPM2, primeramente, analizó el razonamiento del estudiante sobre el proceso de solución al problema de probar, al momento en que lo explicó al profesor. Para explicar bajo qué condiciones el razonamiento del estudiante era válido. Según FPM1 el estudiante:

- Supuso que dos segmentos de línea recta cumplían con la propiedad de paralelismo.
- Visualizó que tales segmentos eran “cortados” por una transversal.
- Utilizó propiedades de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una transversal para probar lo solicitado.

Con base en ello, concluyó que el error del alumno consistió en basar su argumentación en lo visual. Según FPM2, el alumno planteó conjeturas a partir de la configuración geométrica las cuales no asoció con la información conocida: hipótesis del problema o con conceptos y propiedades geométricas.

Con base en ello, decidió responder al alumno modificando la representación geométrica que acompaña al enunciado del problema de probar y que contradijera el razonamiento del estudiante. Su respuesta se describe en seguida.

FPM2: Yo pondría esta figura (señala la representación geométrica inicial) de manera un poco diferente como puse aquí (señala una representación geométrica con modificaciones en la posición de \overline{AC} y \overline{DB} , Véase Figura 22) de que, los segmentos tengan diferentes pendientes y de signos opuestos es decir, están los dos segmentos pero uno quizá sea vertical y este otro (refiriéndose a \overline{DB}) del mismo tamaño no, pero con una pendiente diferente y también uno negativo y uno positivo...de signos opuestos sus pendientes. Uno, para que no se vea que son paralelos y otro, para que nos basemos sólo en la información que nos está dando.

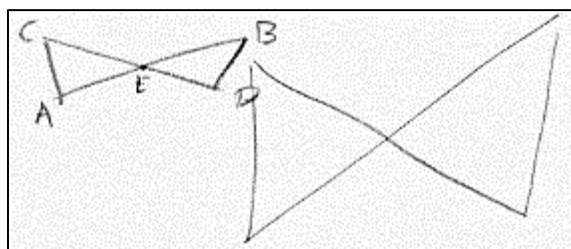


Figura 22. Modificaciones de FPM2 a la representación geométrica inicial.

Para refutar la afirmación del alumno sobre el problema de probar (equivalencia en la medida de los ángulos), FPM2 propuso una configuración geométrica que cumpliera con las modificaciones que solicita el profesor (“en el problema número 8 siguiente tienes que corregir la tesis ya que solo podemos deducir que $\angle A$ es congruente con $\angle D$ ”). FPM2 enfatizó en el alumno el empleo de la figura, pero en relación con la información conocida (hipótesis del problema o con conceptos y propiedades geométricas).

El empleo de la figura se relaciona con la aprehensión operativa, la información conocida con la aprehensión discursiva y, la relación entre el empleo de la figura y la información conocida, con el proceso configural.

Concluimos que FPM2 tomó su decisión de cómo responder al alumno, a partir de entender bajo qué contexto el razonamiento del estudiante era válido, para ello identificó como aspectos claves en su proceso de solución:

- La figura y sus modificaciones (descomponer la figura en sus “partes”).
- Los conceptos y propiedades geométricas (propiedad de rectas paralelas cortadas por una transversal).

Su forma de proceder ante el actuar del estudiante, lo relacionamos con su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural, en tanto a un modelo que entender el razonamiento de una persona al resolver un problema de probar, con base en la aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural. Por ello que su toma de decisiones se base en dar una estructura a la acción del estudiante en términos de la aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural.

Respecto a la segunda situación de enseñanza de la prueba en geometría que los FPM analizaron (explicar razonamientos de dos estudiantes 1 y 2 y diseñar una secuencia de tareas para guiar su razonamiento hacia la solución del problema), FPM2, primeramente, entendió el razonamiento de cada estudiante utilizando el Modelo del Razonamiento Configural.

FPM2 procedió de forma análoga al análisis que realizó sobre su razonamiento al resolver los cuatro problemas de probar en M2. Explicó la forma de proceder de ambos estudiantes mediante “momentos” que refieren a las principales acciones que realizaron, en cada acción identificó la aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural. Este análisis le permitió concluir que ningún estudiante logró dar una solución satisfactoria al problema de probar.

Respecto al estudiante 1, FPM1:

Respuesta de estudiante 1. Identificó que el estudiante no realizó las aprehensiones discursivas adecuadas al confundir el concepto de radio y el concepto de diámetro. Consecuentemente, no logró identificarlos en la representación geométrica (aprehensión operativa). Identificó que los procesos configurales realizados por el estudiante, no son suficientes para dar una solución adecuada al problema de probar (Véase Figura 23).

FPM2: Yo creo que en la aprehensión discursiva el estudiante está identificando mal qué es el radio y qué es el diámetro, el estudiante nos dice que el segmento \overline{PQ} es el radio de ambas circunferencias...pero aunque el segmento (refiriéndose a \overline{PQ}) sí, está constituido por el radio de las dos...pero están encimados entonces es lo que no logra notar. Igual no sé porque dice que el segmento \overline{MN} es el diámetro de las dos circunferencias puesto que el diámetro es la recta de mayor longitud de la circunferencia, pasa por el centro. En la parte operativa el segmento \overline{PQ} está marcado como los dos radios pero con esta aclaración de que no está viendo que están encimados...no hay más información en cuanto a qué hizo operativamente puesto que no hay trazos auxiliares, ni señales, ni nada pues, de que haya marcado puntos o algo, en cuanto a lo discursivo, señala la relación de que si pues, están los dos diámetros en el segmento \overline{MN} y lo del segmento \overline{PQ} son dos radios entonces, por eso ella cree que el segmento \overline{MN} es dos veces el segmento \overline{PQ} puesto que la relación del diámetro con el radio es que el diámetro es dos veces el radio pero pues, en cuanto a lo discursivo tiene clara esa relación pero no es suficiente

porque... \overline{MN} no son los diámetros y \overline{PQ} pues no son los radios y en cuanto al proceso configural, yo identifico los primeros dos momentos que yo señalé como mmm...la identificación de un camino a seguir y en el siguiente, ya lo marca como solución entonces es un brinco muy brusco de ah...pues voy a hacer esto y en un paso ya terminé entonces pues, no es claro.

M	AO	AD	PC
1	Identificar \overline{PQ}	¿radio?	Identificar el camino
2	Identificar \overline{MN}	¿diámetro?	
3	—	Relación radio con el diámetro	Sol del problema

Figura 23. Interpretación de FPM2 al razonamiento del estudiante 1.

FPM2 destacó que el estudiante 1 desconocía los conceptos geométricos involucrados en la resolución del problema de probar, lo cual lo relaciona con la aprehensión discursiva. También que el estudiante se basó únicamente en lo que supuso de la figura, pero no empleó los conceptos geométricos de forma adecuada, por ello no obtuvo la solución del problema de probar.

En relación con el estudiante 2, FPM2:

Respuesta de estudiante 2. Identificó que el estudiante realizó aprehensiones operativas adecuadas para dar solución al problema de probar, al construir configuraciones y subconfiguraciones geométricas, pero no consideró las definiciones y propiedades (aprehensión discursiva) que intervienen en tales construcciones. De esta forma, la coordinación entre la aprehensión operativa y aprehensión discursiva no conlleva a una solución al problema de probar (Véase Figura 24).

FPM2: Aquí sí podemos ver en la figura que hizo trazos auxiliares tenemos este pequeño segmento de M a M' el segmento de N a N' y una prolongación que marca aquí a un punto O y a O' . Entonces, eso puse yo como primer momento, que prolongó \overline{PQ} (aprehensión operativa) para esto, pues yo creo que tiene claro que es una recta (aprehensión discursiva) y que esto lo hizo para identificar el camino de solución (proceso configural)...para el segundo momento, yo creo que lo que hizo fue identificar o marcar...remarcar los segmentos en especial, el segmento $\overline{M'P}$ que es el que nos dice ella, o el estudiante 2...lo que hizo el estudiante 2 que es igual a $\overline{PO'}$ y también identificar el segmento $\overline{QN'}$ en relación con...el segmento $\overline{QO'}$ (aprehensión operativa) para ello necesitamos saber qué es un segmento y que relaciones puede haber entre ellos (aprehensión discursiva)...pues yo creo que en su

proceso pues fue establecer la relación de estos dos pares ¿no?...después dice, se forma una recta que mide lo mismo que va de \overline{PQ} , para mí ese fue un tercer momento, identificar que estos dos segmentos (refiriéndose a $\overline{M'P}$ y $\overline{QN'}$) es igual a \overline{PQ} ...lo escribe, pero yo creo que no lo entendió por eso en aprehensión discursiva puse una línea.

Justificación a la respuesta del estudiante 2			
M	AO	AO	PC
1	Prolongar \overline{PQ}	C. recta	Identificar el camino de solución
2	Marcar $\overline{M'P}$, $\overline{PO'}$, $\overline{QN'}$, $\overline{QO'}$	C. segmentos	Crear un segmento de recta $\overline{M'N}$ tal que $MN = MPN'$
3	Identificar que $\overline{M'P} + \overline{QN'} = \overline{PQ}$		Sol. del problema $MN = 2PQ$

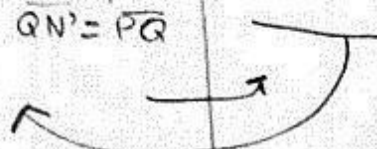


Figura 24. Interpretación de FPM2 al razonamiento del estudiante 2.

Destacó que, en comparación del estudiante 1, el estudiante 2 muestra un mayor conocimiento sobre conceptos como el radio, recta y segmentos de recta. No obstante, cuando realizó las modificaciones a la configuración geométrica, no explicita las propiedades geométricas involucradas. Según FPM2, esto no le permitió obtener una solución.

FPM2: Eso fue lo que faltó notar, ya sea que ella notara que aparte de que lo pusiera o lo marcara en el dibujo, faltó ahí... para que identificara que estos segmentos $\overline{MM'}$, $\overline{OO'}$ y $\overline{NN'}$ son perpendiculares a \overline{MN} ...

IN: Y... ¿por qué era importante que notara eso?

FPM2: Aja, esto era importante para que en un segundo momento viera que...hay rectángulos o hay triángulos o hay una figura geométrica auxiliar y pues podamos trabajar con las propiedades de esas figuras...y llegar o complementar su solución.

Lo que se evidencia en lo realizado por FPM2 es que su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural lo ayudó a:

- Interpretar el razonamiento de los estudiantes a partir de organizar sus acciones en aprehensión operativa, aprehensión discursiva y el proceso configural.
- Identificar aquellos elementos “faltantes” en la estructura aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural.

Siguiendo con el diseño de la secuencia de tareas, para el estudiante 1, FPM2 propuso lo siguiente:

1. Aprendizaje sobre circunferencias y líneas en las circunferencias. Según su interpretación, el estudiante no conoce adecuadamente el concepto de radio y

diámetro por lo que requiere de una serie de tareas que enfatizen: 1) qué es el radio, circunferencia, recta secante, recta tangente, etc. 2) trazos en circunferencias secantes. Pretende que el estudiante modifique su entendimiento respecto a las relaciones entre radio y diámetro en circunferencias.

2. Empleo de propiedades de figuras geométricas. Se consideran tareas que involucren a triángulos o rectángulos. Pretende que el estudiante conozca figuras geométricas y sus propiedades, las cuales le serán útiles para dar solución al problema de probar.
3. Resolución de problemas de probar que involucran distintas subconfiguraciones geométricas. Se consideran tareas que “combinen” figuras, tal como la resolución de este problema de probar.

Notamos en lo realizado por FPM2, que su diseño involucró las aprehensiones discursivas, aprehensiones operativas y los procesos configurales que “faltó” que el estudiante 1 realice. En relación con su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural, consideró como aspectos guía los conceptos, teoremas y propiedades geométricas (aprehensión discursiva), el entendimiento sobre figuras geométricas (aprehensión operativa) y la unión entre estas (proceso configural).

Para el estudiante 2, no propuso una secuencia de tareas sino más bien, algunas sugerencias que ayudaran a completar su proceso de solución:

1. Identificar relaciones de perpendicularidad.
2. Trazar figuras geométricas que ayuden en la solución del problema.
3. Identificar que $\overline{M'P} + \overline{QN'} = \overline{PQ}$.

Según la interpretación de FPM2, el estudiante dispone del conocimiento necesario para resolver el problema de probar sólo falta orientar su conocimiento hacia: 1) Asociar definiciones y conceptos geométricos (aprehensión discursiva), 2) Construir subconfiguraciones geométricas (aprehensión operativa) y, visualizar relaciones entre los elementos de las subconfiguraciones geométricas y la propiedad de segmento suma (proceso configural). De igual forma, su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural, lo lleva a considerar como aspectos guía los conceptos, teoremas y propiedades geométricas (aprehensión discursiva), el entendimiento sobre figuras geométricas (aprehensión operativa) y la unión entre estas (proceso configural).

El nivel que le corresponde respecto a la categoría de tomar decisiones es el 3, en razón de que toma decisiones con base en las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales.

Finalmente, al ser cuestionado por el investigador sobre los elementos del Modelo del Razonamiento Configural (aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural) y la utilidad del mismo, mencionó:

FPM2: La aprehensión operativa es leer la figura si nos dan una figura auxiliar, como que identificar sus partes, sus elementos...todo lo que nos digan visualmente o todo lo que hagamos a esa figura o sino nos dan figura pues las figuras auxiliares que hagamos o incluso aunque nos den una figura tal vez separemos ciertas áreas...las figuras que deseamos hacer, eso para mí es la aprehensión operativa.

FPM2: La aprehensión discursiva son los conceptos, teoremas, propiedades...de lo que estamos trabajando y, el proceso configural es la unión entre estas. Y, yo creo que en el proceso configural es sí la unión, pero porqué o sea como que esto tienen en común, pero para que nos lleva ¿no?

FPM2: (Sobre el Modelo del Razonamiento Configural) es importante porque bueno, en simplemente separar qué es lo que estás viendo o haciendo visualmente o gráficamente, qué conceptos tienes claros y porqué. Entonces...sino pudiera separar estas tres relaciones pues no podría sugerir que visualmente hiciéramos un cambio (señala su respuesta a la primera situación de enseñanza de la prueba) y...en este que es el más completo (señala la segunda situación de enseñanza de la prueba) pues me sirve para analizar qué es lo que están contestando los estudiantes y cómo se les puede ayudar. Al estudiante 1...podemos ver que en lo discursivo no tiene claro los conceptos básicos...al estudiante dos...entiende más de lo que ha visto gráficamente (aprehensión operativa) entonces si tiene conceptos...entonces nos sirve para separar, separar las aprehensiones con el proceso para ver qué es lo que está haciendo...

El análisis sobre las respuestas de FPM2 y FPM3 a los Problemas de Probar (PP) y Tareas Profesionales (TP) evidenció el desarrollo de la competencia mirar el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría (I: Identificar, In: Interpretar, TD: tomar decisiones) a partir de su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural, como sigue:

Tabla 16

Desarrollo de la mirada profesional de FPM2 y su conocimiento del Modelo del Razonamiento Configural

PP o TP	I	In	TD	Conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural de FPM2
P1	N2	N2	-	Aprehensión operativa: acciones sobre la figura Aprehensión discursiva: pasos de la demostración en los cuales se enuncia la propiedad o el teorema utilizado
P2	N2	N3	-	Aprehensión operativa: “pasos” que se realizan sobre la figura

				<p>Aprehensión discursiva: propiedades, conceptos y definiciones que utiliza en cada “paso” sobre la figura.</p> <p>Proceso configural: relaciones entre las apreensiones operativas y las apreensiones discursivas.</p>
P3	N2	N3	-	<p>Aprehensión operativa: “pasos” que se realizan sobre la figura</p> <p>Aprehensión discursiva: propiedades, conceptos y definiciones que utiliza en cada “paso” sobre la figura.</p> <p>Proceso configural: relaciones entre las apreensiones operativas y las apreensiones discursivas.</p>
P4	N3	N5	-	<p>Aprehensión operativa: modificaciones sobre la configuración geométrica.</p> <p>Aprehensión discursiva: asociación de propiedades y conceptos geométricos a las configuraciones geométricas.</p> <p>Proceso configural: relaciones entre las apreensiones operativas y las apreensiones discursivas. Destacar el papel de los procesos configurales para la resolución del problema de probar.</p>
TP	-	-	N3	<p>Aprehensión operativa: construcción de configuraciones geométricas y sus modificaciones. Saber manipular la figura.</p> <p>Aprehensión discursiva: conceptos, teoremas y propiedades relacionadas con las figuras con las que se están trabajando.</p> <p>Proceso configural: relaciones entre las apreensiones operativas y las apreensiones discursivas. Destacar el papel de los procesos configurales para la resolución del problema de probar.</p> <p>Modelo del Razonamiento Configural: Modelo para estructurar en el razonamiento involucrado al resolver un problema de probar en:</p> <p>Lo que se logra visualizar o realizar sobre las figuras (aprehensión operativa); Conceptos, propiedades y teoremas (aprehensión discursiva) y la relación entre ambos (proceso configural).</p>

Respecto a FPM2, describimos su mirada profesional ante su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural como sigue:

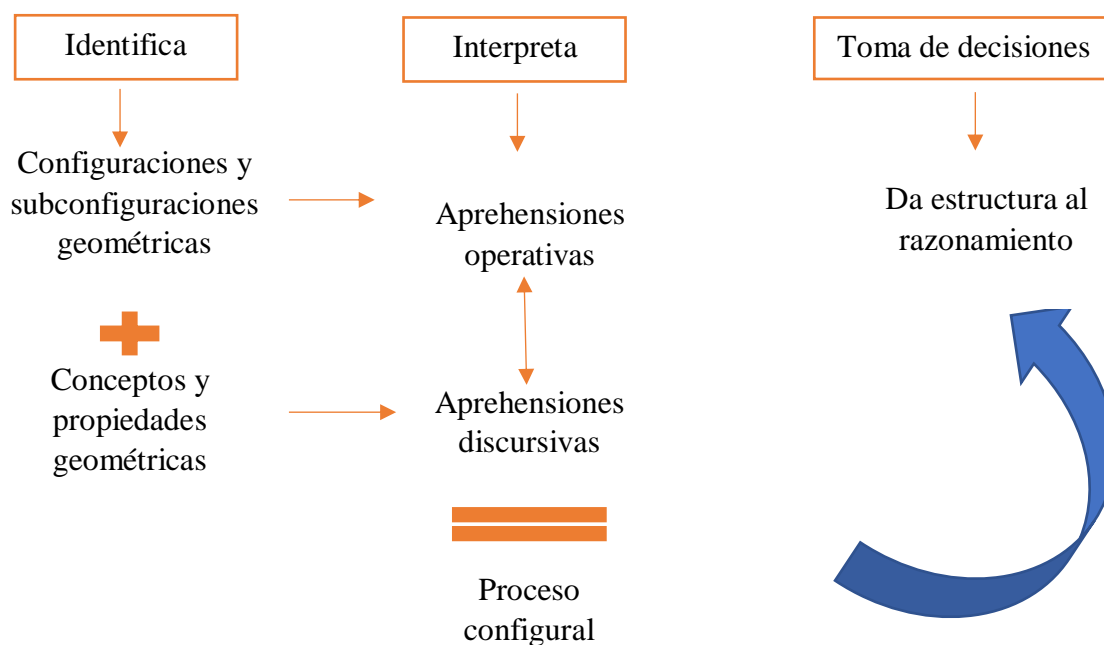
Cuando FPM2 se enfrentó a una situación de progresión en el aprendizaje de la prueba en geometría, primeramente, entendió el razonamiento evidenciado por el estudiante utilizando

el Modelo del Razonamiento Configural. En tal contexto, destacó a las configuraciones y subconfiguraciones geométricas y los conceptos y propiedades geométricas como aspectos claves en su proceso de solución e interpretó teóricamente:

- El entendimiento sobre una figura respecto a sus elementos y sus posibles modificaciones como aprehensión operativa.
- Los conceptos, teoremas y propiedades geométricas involucrados en la resolución de un problema de probar, como aprehensiones discursivas.
- Las relaciones entre el entendimiento sobre la figura y el empleo de conceptos, teoremas y propiedades geométricas como procesos configurales. Destaca el papel de los procesos configurales en la resolución de un problema de probar.

A partir de ello, “estructura” las aprehensiones operativas y/o aprehensiones discursivas que un estudiante debe realizar en coordinación, para obtener una solución adecuada al problema de probar.

La Figura 25 muestra lo antes descrito:



Entendimiento del razonamiento

Figura 25. Mirada profesional de FPM2.

Capítulo 5. Conclusiones y reflexiones

El objetivo de la investigación reportada aquí, fue caracterizar el desarrollo de la competencia mirar el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría en FPM a partir de su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural. Se fundamentó teóricamente mediante un marco conceptual compuesto de la competencia docente mirada profesional (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010) y el Modelo del Razonamiento Configural (Torregrosa y Quesada, 20017). En el análisis cualitativo de los datos se puso especial interés en las unidades del estudio de caso (FPM1, FPM2 y FPM3) en términos de los elementos que identificaron como relevantes al resolver problemas de probar, las interpretaciones teóricas que realizaron sobre sus procesos de solución y las decisiones que tomaron para la progresión en el aprendizaje de la prueba en geometría en estudiantes.

A partir de ello, concluimos que existen dos formas de razonar sobre el empleo del Modelo del Razonamiento Configural en el contexto del aprendizaje de la prueba en geometría. Éstas se encuentran condicionadas a la manera en que se conocen los elementos del Modelo del Razonamiento Configural (aprehensión operativa, aprehensión discursiva y proceso configural).

Lo realizado en esta investigación, nos permitió validar que la incorporación de un conocimiento en Didáctica de la Matemática en FPM, como es el Modelo del Razonamiento Configural contribuye al desarrollo de la mirada profesional en el contexto de la prueba en geometría. Notamos que el aporte del aprendizaje del Modelo del Razonamiento Configural reside en su uso como una herramienta conceptual para el análisis de los razonamientos de estudiantes al resolver problemas de probar lo cual, contribuye a una toma de decisiones que favorezca la progresión en su aprendizaje.

5.1 Mirada profesional en PFM a partir de su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural

Se presentan por casos, las dos formas de razonar sobre el empleo del Modelo del Razonamiento Configural para mirar el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas de probar en geometría:

5.1.2 Caso 1. Modelo de orden al resolver problemas de probar

Un FPM que refiere a este caso, emplea el Modelo del Razonamiento Configural como un Modelo que delimita “pasos” en la resolución de un problema de probar en geometría. Tales pasos siguen el orden: aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales. FPM se caracteriza por disponer de un conocimiento matemático sobre el proceso de solución de un problema de probar ordenado con los elementos teóricos del

Modelo del Razonamiento Configural, tal conocimiento lo utiliza como una guía del razonamiento que todo resolutor debe seguir para obtener una solución satisfactoria.

Esta forma de razonar sobre el empleo del Modelo del Razonamiento Configural se encuentra determinado por los elementos que identifican como claves al resolver problemas de probar en geometría, cómo interpretan teóricamente las acciones de un resolutor y de qué forma toman decisiones en situaciones de enseñanza de la prueba en geometría. En este caso FPM:

- Diferencia los conceptos y propiedades geométricas de las manipulaciones sobre las configuraciones geométricas. Identifica las configuraciones y subconfiguraciones geométricas y los conceptos y propiedades geométricas como elementos clave al resolver un problema de probar.
- Interpreta teóricamente las modificaciones sobre la representación geométrica como aprehensiones operativas, las justificaciones mediante conceptos y propiedades geométricas como aprehensiones discursivas y las relaciones entre las modificaciones sobre la representación y su justificación, como procesos configurales.
- Toma decisiones para la progresión en el aprendizaje de la prueba en estudiantes con base en los pasos que se deben de seguir en un razonamiento conocido que da solución al problema de probar. Para ello utiliza como esquema, previamente definido:
Aprehensión operativa →Aprehensión discursiva→Proceso configural

5.1.3 Caso 2. Modelo que estructura el razonamiento al resolver un problema de probar

Un FPM que refiere a este caso, emplea el Modelo del Razonamiento Configural como un Modelo que estructura el razonamiento de una persona al resolver un problema de probar en geometría. Tal estructuración refiere a las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y a los procesos configurales involucrados en el razonamiento. FPM se caracteriza por analizar el razonamiento evidenciado por el resolutor utilizando los elementos teóricos del Modelo del Razonamiento Configural.

Esta forma de razonar sobre el empleo del Modelo del Razonamiento Configural se encuentra determinado por los elementos que identifican como claves al resolver problemas de probar en geometría, cómo interpretan teóricamente las acciones de un resolutor y de qué forma toman decisiones en situaciones de enseñanza de la prueba en geometría. En este caso FPM:

- Diferencia los conceptos y propiedades geométricas de las manipulaciones sobre las configuraciones geométricas. Identifica como aspectos relevantes las modificaciones sobre la figura (explícitas o no) y los conceptos y propiedades geométricas que emplea en cada paso, para justificar tales modificaciones.
- Interpreta teóricamente el entendimiento sobre una figura respecto a sus elementos y sus posibles modificaciones como aprehensión operativa, los conceptos y teoremas y propiedades geométricas involucrados en la resolución de un problema de probar, como aprehensión discursiva y las relaciones entre el entendimiento sobre la figura y

el empleo de conceptos, teoremas y propiedades geométricas como procesos configurales.

- Toma decisiones con base en “completar” el razonamiento de un estudiante utilizando como referente la estructura: aprehensiones operativas y/o aprehensiones discursivas las cuales debe realizar en coordinación, para obtener una solución adecuada para el problema de probar en geometría.

5.2 Reflexiones finales

El desarrollo de la mirada profesional en FPM se evidenció como sigue:

Identificar: enfocaron la atención en los conceptos y propiedades geométricas y en la configuración geométrica inicial para explicar sus procesos de solución, incorporaron las modificaciones a la representación geométrica y la identificación de subconfiguraciones geométricas y sus componentes, como elementos claves de su proceso de solución.

Interpretar: incorporaron las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas en su análisis, relacionaron ambos elementos teóricos mediante los procesos configurales y reconocieron su papel en los procesos de solución.

Tomar decisiones: propusieron intervenciones didácticas o secuencias de tareas que guiarán la progresión en el aprendizaje de estudiantes sobre la prueba en geometría a partir del entendimiento de sus razonamientos.

A pesar de que diseñamos el ME para que los FPM desarrollaran la competencia docente mirada profesional de los razonamientos involucrados al resolver problemas de probar, en relación con la adquisición de las destrezas de identificar, interpretar y tomar decisiones mediante su uso en problemas de probar cada vez más complejos, notamos que su desarrollo fue conforme a las siguientes fases:

- *Fase 1: Reconocimiento de elementos geométricos claves en procesos de solución de problemas de probar en geometría.*
Primeramente, identificaron los conceptos y las propiedades geométricas, así como las modificaciones sobre la representación geométrica como aspectos claves al resolver problemas de probar en geometría. Se plantea que esto es consecuente de su aprendizaje antecedente sobre la prueba en geometría.
- *Fase 2: Asociación de elementos geométricos claves con los elementos teóricos de aprehensión operativa y aprehensión discursiva.*
Interpretaron teóricamente los aspectos relacionados con la figura (manipulaciones, operaciones, entre otros) como aprehensiones operativas y los aspectos relacionados con los conceptos y propiedades geométricas (uso para justificar o argumentar los pasos en el proceso de solución) como aprehensiones discursivas.

- *Fase 3: Asociación de aprehensiones operativas y aprehensiones discursivas mediante el proceso configural.*
Relacionaron las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas mediante los procesos configurales. También, reconocieron el papel de los procesos configurales en su proceso de solución.
- *Fase 4: Uso del modelo del Razonamiento Configural como herramienta conceptual.*
Emplearon el Modelo del Razonamiento Configural en el análisis de los procesos de solución de estudiantes para resolver problemas de probar en geometría y, con base en ello, tomaron decisiones que favorecían la progresión en su aprendizaje.

Bajo este contexto, coincidimos con lo señalado por Llinares (2012) sobre el conocimiento en Didáctica de la Matemática como un aspecto importante para el desarrollo de la mirada profesional. En nuestro caso, el conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural fungió como una herramienta conceptual para el análisis de los razonamientos involucrados al resolver problemas de probar.

Consideramos que los FPM que desarrollan la mirada profesional a partir del conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural, se distinguen por entender el razonamiento que evidencian los estudiantes al resolver un problema de probar en geometría y, a partir de ello, tomar decisiones que favorezcan la progresión en su aprendizaje. Tal como reporta la literatura (e.g. Llinares, 2011) saber qué mirar y cómo mirar contribuye a intervenciones más efectivas en el aula.

De igual forma, y en concordancia con lo señalado por Llinares (2012), consideramos la discusión orquestada, como un aspecto importante para el desarrollo de la mirada profesional en FPM. Posterior a la resolución de los problemas de probar, se discutía con los FPM sobre su proceso de solución y su interpretación sobre la misma a fin de producir análisis más profundos sobre éstos.

También, reconocemos a la reflexión que realizaron los FPM sobre su propio actuar, como un aspecto relevante para la movilización de las destrezas de identificar, interpretar y tomar decisiones. El análisis que realizaron los FPM sobre su propio actuar, les permitió reconocer aquellos aspectos que eran claves en su solución, relacionarlos con los elementos teóricos del Modelo del Razonamiento Configural y posteriormente, contrastarlo con la forma de proceder de estudiantes de secundaria.

Consecuente de este trabajo de investigación, reconocemos que un desafío mayor, será documentar más profundamente sobre aquellos aspectos por considerar en la formación de profesores cuando se pretende desarrollar su mirada profesional mediante el aprendizaje de elementos teóricos propios de Didáctica de la Matemática.

Por ejemplo, estudiar qué tipo de intervenciones en espacios de formación docente, se requieren para movilizar el desarrollo de las tres destrezas: identificar, interpretar y tomar decisiones, en FPM al incorporar un conocimiento de Didáctica de la Matemática o bien,

caracterizar la puesta en uso del conocimiento en FPM a fin de desarrollar su mirada profesional.

Por último, otro aspecto a profundizar a partir de la investigación realizada, es sobre cómo trasciende el desarrollo de la mirada profesional en FPM en relación con su conocimiento sobre el Modelo del Razonamiento Configural, en interacciones “reales” entre estudiantes y profesores. Esto consistiría en realizar una continuidad al trabajo con los FPM, cuando asumen el rol de profesores al enseñar la prueba en geometría con estudiantes. Lo anterior, compete a futuras investigaciones.

Referencias bibliográficas

- Balacheff, N. (2002). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. En F. L. Lin (Ed), *Proceeding of the second UCSMP international conference on mathematics education* (284-297). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Bartell, T., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 57-79.
- Bell, E. T. (1992). *Historia de las Matemáticas*, Ciudad de México, México: Fondo nacional de cultura económica.
- Boyer, C. B. (1986). *Historia de las matemáticas*. Madrid, España: Ciencia y Tecnología Alianza Editorial.
- Buchbinder, O. y Zaslavsky, O. (2013). Inconsistencies in students' understanding of proof and refutation of school mathematics. *37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (129-137). Kiel: PME. Recuperado de <http://www.igpme.org/publications/current-proceedings/>
- Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229-236). Bilbao: SEIEM.
- Carpenter, T., Franke, M. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
- Clemente, F. y Llinares, S. (2014). Relación entre el conocimiento de geometría y el “truncamiento” del razonamiento configural. En M.T. González (Ed.) *Investigación en Educación Matemática XVIII*. Salamanca: SEIEM.
- Clemente, F. y Llinares, S. (2015). Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestro en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 9-27.
- Clemente, F. Llinares, S. y Torregrosa, G. (2017). Visualización y Razonamiento Configural. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 31(57), 497-516.
- Coxeter, H. y Greitzer, S. (1994). Retorno a la geometría. Madrid, España: Dls-Euler.
- Denzin, N.K. y Lincoln, Y. S. (1994). Introduction Entering the field of qualitative research. En N,K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research*. Sage Publications.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processes. En Sutherland, R. y Mason, J. (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education* (142-157). Berlín, Germany: Springer.

- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana and V. Villani (Eds.). *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st*, 37-51. Dordrecht, Netherland: Kluwe Academic Publishers.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* (3-26) Columbus, Ohio, USA.
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.) *Theorems in School From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (137-162). Rotterdam, Netherland: Sense Publishers.
- Fernández, C., Valls, J. y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente mirar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds), *Investigación en Educación Matemáticas XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.
- Fischbein, E. (1993). The theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- González, B. (2015). Módulo y desarrollo de competencia: origen de una concepción diferente. *Actualidades Investigativas en Educación*, 15(3), 1-14.
- Gúsiev, V., Litvienko, V. y Mordkóvich, A. (1989). Prácticas para resolver problemas matemáticos, Geometría. Moscú, Rusia: MIR.
- Gutiérrez, A. (2005). *Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica*. Obtenido el 28 de octubre, 2019, del sitio web <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html>
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta ed.). México: McGraw Hill.
- Hershkowitz, R., Parysz, B. y Van Dermolen, J. (1996). Space and shape. En A. J. Bishop; M. A. Clemens; C. Keitel; J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (161-204). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Howard, E. (1985). Estudio de las geometrías. Ciudad de México, México: UTEHA.
- Issic, K. y Yeung, C. (2017). Preservice and novice teachers' knowledge on preformal proofs: Triangle postulate as an example. *Mathematics Teacher Education and Development*, 19(2), 51-80.
- Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, USA: University of Chicago Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 53-70.
- Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematical teacher's professional noticing. *Sisyphus Journal of Education*, 1(3), 76-93.
- Lin, M. y Wu, C. (2007). Uses of examples in geometric conjecturing. *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (209-216) Seoul, Korea.
- Martin, I. (2002). Geometría universitaria. Ciudad de México, México: International Thomson Editores.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. U. S: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Otten, S., Gilbertson, N.J., Males, L. M., y Clarck, D.L. (2014). The mathematical nature of reasoning-and-proving opportunities in geometry textbooks. *Mathematical thinking and Learning*, 16(1), 51-79.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 297-311.
- Prior, J. y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 339-368.
- Reid, D. (2005). The meaning of proof in mathematics education. En M. Bosch (Ed), *Proceedings of the 4th conference of the European society for research in mathematics education* (458-468). Sant Felio de Guixols, Spain: ERME. Recuperado de http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG4.pdf
- Ríbnikov, K. (1987). *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Editorial Mir Moscú.
- Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017). Razonamiento Configural y argumentación en procesos de prueba en contexto geométrico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M-L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI*. Zaragoza: SEIEM.
- Sarama, J., Clements, D., Barret, J., Van Dine, D. y McDonel, J. (2011). Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. *ZDM Mathematics Education*, 43, 667-680.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(6), 1305-1329.
- Schack, E., Fisher, M., Thomas, J., Eisenhardt, S., Tasell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 379-397.

- SEP (2017). Aprendizaje Clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica. Ciudad de México, México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP (2011). Plan de estudios 2011. Educación básica. Ciudad de México, México: Secretaría de Educación Pública.
- Sherin, M. (2001). Developing a professional vision of classroom events. En Wood, T., Nelson, B., Warfield, J. (Eds.) *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (75-93). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Sherin, M., Jacobs, V. y Philipp, R. (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teacher's eyes*. Nueva York: Routledge.
- Stake, R. (2005). Investigación con estudio de casos. Madrid, España: Morata.
- Stockero, S. (2014). Transitions in prospective mathematics teacher noticing. En J. L. Lo (Ed), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (239-259). London: Springer.
- Stylianides, A. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 289-321.
- Stylianides, A. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16.
- Stylianides, A., Bieda, K. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (315, 351).
- Torregrosa, G. (2017). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 1-17.
- Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.
- Torregrosa, G. Quesada, H. y Penalva, M. C. (2010). Razonamiento Configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340.
- Van Es, E. y Sherin, M. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10, 571-596.
- Weber, K. (2014). Proof as a closer concept. *Proceedings of 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (353-360) Vancouver, Canada.
- Wilson, P., Mojica, G. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behaviour*, 32, 102-121.
- Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Siglo XXI, Madrid.
- Wussing, H. y Arnold, W. (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. PUZ, Zaragoza.

- Zeybek, Z. (2016). Pre-Service Elementary Teachers' Proof and Counterexample Conceptions. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17(2), 1-30.
- Zeybek, Z. (2012). Prospective Teachers' Conceptions of Proof. En L. R. Van Zoest, J.J. Lo y J.L. Kratky (eds). *Proceedings of the 34th anual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (495-502). Kalamazoo, Michigan.
- Zapatera, A. y Callejo, M. (2017). El conocimiento matemático y la mirada profesional de estudiantes para maestro en el contexto de la generalización de patrones. Caracterización de perfiles. *Revista Complutense de Educación*, 29(4), 1217-1235.

Anexos

Anexo 1. Instrumento de evaluación

Nombre: _____

Fecha: _____

Género: _____

1. Enuncia las definiciones de lo siguiente:
 - a) Triángulo isósceles

 - b) Incentro

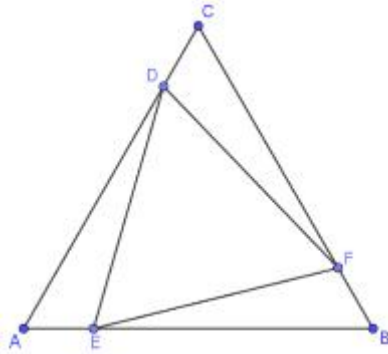
2. Enuncia las propiedades siguientes:
 - a) Propiedad de paralelismo

 - b) Propiedad de perpendicularidad

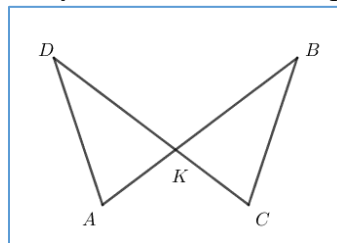
3. Enuncia los criterios de congruencia de triángulos

4. Resuelve los problemas siguientes:

- a) En la figura siguiente el triángulo ABC es equilátero. Además $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CD}$. Prueba que el triángulo DEF es equilátero.



- b) En la figura siguiente, $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$ y $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Prueba que $\overline{AK} \equiv \overline{CK}$



Anexo 2. Documento teórico

Este documento pretende brindar un apoyo para la interpretación de la resolución a problemas de probar en geometría a partir del modelo teórico del Razonamiento Configural.

Así, se consideran las siguientes ideas:

1. Aprender qué es una prueba y su relevancia en la educación matemática
2. Caracterizar la coordinación entre figuras y conceptos geométricos que intervienen en la resolución de problemas de probar en geometría

¿Qué entendemos por probar?

Según el Diccionario de la Real Academia Española, probar es justificar, manifestar y hacer patente la certeza de un hecho o la verdad de algo con razones, instrumentos o testigos. Una prueba es entonces, la razón, argumento, instrumento u otro medio con que se pretende mostrar y hacer patente la verdad o falsedad de algo.

En matemáticas esto debe hacerse mediante una secuencia de deducciones lógicas que nos llevan a concluir la validez de la declaración del problema (Megías, 2010). Dentro del campo de la educación matemática, según la postura de Stylianides (2007), la prueba se define como un argumento matemático para la verdad o falsedad de una declaración matemática que cumple con dos criterios:

1. Un argumento que califique como prueba debe usar declaraciones verdaderas, modos válidos de razonamiento y modos apropiados de representación.
2. Un argumento que califique como prueba debe usar enunciados, modos de razonamiento y modos de representación que sean aceptados, conocidos o dentro del alcance conceptual de los estudiantes en una comunidad de aula determinada.

De esta forma, el primer criterio refleja una consideración matemática en tanto que el segundo criterio, refleja una consideración estudiantil.

¿Por qué es importante que los estudiantes aprendan a construir pruebas?

Actualmente, las orientaciones curriculares y las recomendaciones de organizaciones internacionales como el National Council of Teachers of Mathematics (2010), destacan como objetivo fundamental de la educación matemática la capacidad de efectuar pruebas al ayudar a los estudiantes a comprender porque algo es verdad.

En particular, la geometría nos proporciona un contexto de aprendizaje en el que los estudiantes aprenden a razonar y a ver la estructura axiomática de las matemáticas (NCTM, 2010).

Asimismo, la relevancia de la prueba se observa en las orientaciones nacionales del documento “Plan de estudios 2011 educación básica” (SEP, 2011) que plantea el formular y validar conjeturas y, buscar argumentos para validar procedimientos y resultados, como dos de los seis aspectos involucrados en el aprendizaje matemático. Además, desde el nivel de secundaria se atiende al tránsito del razonamiento intuitivo al deductivo.

Pruebas en geometría

Cuando probamos en geometría partimos de un enunciado que, en algunos casos, está acompañado de un dibujo o representación de la situación inicial y en otros casos, se tiene que construir tal representación.

A partir de ello, se **asocian una o varias afirmaciones matemáticas del enunciado al dibujo que lo acompaña o que se construye**. A continuación, se analiza la información y con cierta frecuencia, se realizan **modificaciones al dibujo o representación inicial**.

Como consecuencia, se pueden **necesitar nuevas asociaciones entre el dibujo resultante y afirmaciones matemáticas** que, a su vez, puede implicar nuevos cambios, repitiéndose un ciclo hasta que se alcanza la solución o se abandona la estrategia seguida.

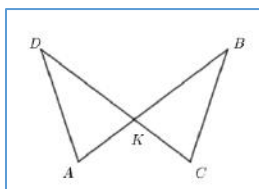
Siguiendo esta dirección, investigaciones como las de Torregrosa, Quesada y Penalva (2010) plantean un modelo teórico denominado Modelo de Razonamiento Configural el cual, completa el modelo cognitivo de Duval (1993) y puede ser empleado para comprender el pensamiento de los estudiantes manifestado en sus producciones verbales o escritas al resolver problemas de probar en geometría. El modelo del Razonamiento Configural destaca como elementos involucrados en los procesos de resolución de problemas de probar en geometría:

1. Representaciones planas de los objetos geométricos (configuraciones geométricas), modificaciones en las representaciones (subconfiguraciones) y afirmaciones matemáticas.
2. Modificación física o mental de la configuración inicial denominado *aprehensión operativa*.
3. Acción que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas) denominado *aprehensión discursiva*.
4. Interacciones entre configuraciones iniciales y posibles modificaciones de acuerdo con definiciones, teoremas y propiedades geométricas necesarias para probar en geometría denominado *proceso configural*.

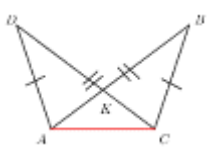
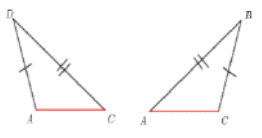

Veamos algunos ejemplos de lo anterior:

Ejemplo 1. En la figura, $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$ y $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Probar que $\overline{AK} \equiv \overline{CK}$

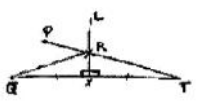
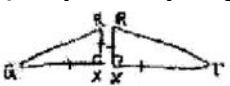
Representación inicial:



Solución	Descripción	Proceso configural
	Asocia las hipótesis iniciales $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$ y $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (<i>aprehensión discursiva</i>) a la configuración dada, mediante trazos en dicha	La coordinación <i>aprehensión discursiva/aprehensión operativa</i> conlleva a tener un referente visual del problema de probar.

	configuración (<i>aprehensión operativa</i>).	
	Modifica la configuración inicial mediante el trazo auxiliar (<i>aprehensión operativa</i>) de un segmento de línea recta \overline{AC} (<i>aprehensión discursiva</i>). Se obtiene una subconfiguración.	La coordinación <i>aprehensión operativa/aprehensión discursiva</i> propicia tener una subconfiguración útil para la resolución del problema de probar.
 Se debe probar que $\triangle DAC \cong \triangle BCA$	Modifica la subconfiguración geométrica (<i>aprehensión operativa</i>) mediante su descomposición en dos triángulos $\triangle DAC$ y $\triangle BCA$ (<i>aprehensión discursiva</i>).	La coordinación <i>aprehensión operativa/aprehensión discursiva</i> permite el planteamiento de una conjetura: " $\triangle DAC \cong \triangle BCA$ " Que contribuye a la solución del problema de probar.
El triángulo $\triangle DAC \cong \triangle BCA$ por el criterio de congruencia <i>LLL</i>	Identifica elementos de la subconfiguración geométrica, lados correspondientes del triángulo (<i>aprehensión operativa</i>) y los asocia con la propiedad de congruencia de triángulos mediante el criterio de congruencia <i>LLL</i> (<i>aprehensión discursiva</i>).	La coordinación <i>aprehensión operativa/aprehensión discursiva</i> conlleva la demostración de la conjetura.
 Se debe probar que el triángulo $\triangle AKC$ es isósceles	Identifica una subconfiguración geométrica (<i>aprehensión operativa</i>) de un triángulo (<i>aprehensión discursiva</i>).	La coordinación <i>aprehensión operativa/aprehensión discursiva</i> permite el planteamiento de una conjetura (la de si el triángulo es isósceles) que contribuye a la solución del problema de probar.
El $\triangle AKC$ es isósceles porque el ángulo $\angle BAC \cong \angle DCA$	Identifica elementos de la subconfiguración geométrica, ángulos congruentes (<i>aprehensión operativa</i>) y los asocia con el concepto de triángulo isósceles (<i>aprehensión discursiva</i>).	La coordinación <i>aprehensión operativa/aprehensión discursiva</i> conlleva a la demostración de la conjetura.
Como el $\triangle AKC$ es isósceles entonces, $\overline{AK} \cong \overline{CK}$	Identifica elementos de la subconfiguración geométrica, lados (<i>aprehensión operativa</i>), y los asocia con el concepto de triángulo isósceles (<i>aprehensión discursiva</i>).	La coordinación <i>aprehensión operativa/aprehensión discursiva</i> conlleva a la solución al problema de probar.

Ejemplo 2. La recta L es mediatriz de \overline{QT} . La recta \overline{PT} corta a L en el punto R tal que P es un punto que no pertenece a \overline{QT} . Probar que $m\overline{PT} = m\overline{PR} + m\overline{RQ}$

Fragmentos de la transcripción de la solución	Descripción de la resolución	Proceso configural
	<p>Representa la situación inicial (<i>aprehensión operativa</i>) mediante las afirmaciones del enunciado (<i>aprehensión discursiva</i>): La recta L es mediatriz de \overline{QT} La recta \overline{PT} corta a L en el punto R.</p>	<p>La coordinación <i>aprehensión discursiva/aprehensión operativa</i> conlleva tener una configuración como referente visual del problema de probar.</p>
<p>La mediatriz L es perpendicular a QT (forma ángulos rectos)</p>	<p>Asocia la definición de mediatriz a la representación inicial (<i>aprehensión discursiva</i>) mediante las marcas de ángulo recto (<i>aprehensión operativa</i>).</p>	<p>La coordinación <i>aprehensión discursiva/aprehensión operativa</i> propicia identificar propiedades útiles para la resolución al problema de probar.</p>
<p>Hay que demostrar que la distancia \overline{RQ} es la misma que la de \overline{RT}</p>	<p>El estudiante asocia la igualdad a probar (<i>aprehensión discursiva</i>) a la representación inicial (<i>aprehensión operativa</i>)</p>	<p>La coordinación <i>aprehensión discursiva/aprehensión operativa</i> conlleva al planteamiento de una conjetura: “La distancia \overline{RQ} es la misma que la de \overline{RT}” que contribuye a la solución del problema de probar.</p>
<p>Determino los triángulos ΔQRX y ΔTRX y tengo:</p> 	<p>Identifica subconfiguraciones geométricas (<i>aprehensión operativa</i>) de triángulos (<i>aprehensión discursiva</i>).</p>	<p>La coordinación <i>aprehensión operativa/aprehensión discursiva</i> propicia tener una subconfiguración útil para la solución del problema de probar.</p>
<p>Congruencia LAL</p>	<p>Asocia a las subconfiguraciones geométricas (<i>aprehensión operativa</i>) el concepto de congruencia de triángulos (<i>aprehensión discursiva</i>).</p>	<p>La coordinación <i>aprehensión operativa/aprehensión discursiva</i> conlleva a la demostración de la conjetura.</p>
<p>Lado $\overline{RX} \equiv \overline{RX}$ (lado común)</p>	<p>Verifica la congruencia de los triángulos (<i>aprehensión operativa</i>)</p>	
<p>Ángulo $\angle RXQ = \angle RXT$ (la mediatriz es perpendicular y forma ángulos rectos: $\angle RXQ = 90^\circ = \angle RXT$)</p>	<p>obteniendo la tesis de la afirmación (<i>aprehensión discursiva</i>).</p>	
<p>Lado $\overline{QX} \equiv \overline{TX}$ (la mediatriz divide al segmento en partes iguales, es perpendicular y pasa por el punto medio)</p>		
<p>La distancia de $\overline{RQ} = \overline{RT}$</p>		

Note que en estas soluciones los procesos configurales son clave para:

1. Construir e identificar subconfiguraciones que sugieren la demostración de conjeturas.
2. Demostrar conjeturas que conllevan a la solución del problema.

Así, centrar la atención en las interacciones entre configuraciones iniciales y posibles modificaciones de acuerdo con definiciones, teoremas y propiedades geométricas (*procesos configurales*) nos brinda elementos que son claves para comprender la resolución de los problemas de probar.

Bibliografía de consulta:

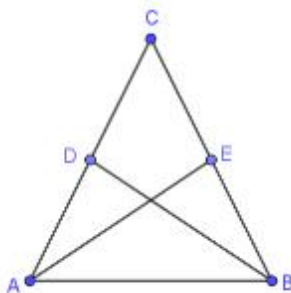
- Megías, D. (2010). *Formal Proof. Understanding, writing and evaluating proofs*. Universitat Oberta de Catalunya (Editorial).
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. U.S: The National Council of Teachers of Mathematics.
- SEP (2011). *Plan de estudios 2011. Educación básica*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Stylianides, G. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16.
- Torregrosa, G. Quesada, H. y Penalva, M. C. (2010). Razonamiento Configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340.

Anexo 3. Problema de probar 1 y 2

Nombre: _____

Fecha: _____ Género: _____

Problema 1. En la figura siguiente $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ y $\angle CAE \equiv \angle CBD$. Probar que los triángulos ACE y BCD son congruentes.



- Describe detalladamente el proceso de solución indicando los conceptos y propiedades geométricas utilizadas, así como las construcciones auxiliares que realices, en caso de ser necesarias, para resolver el problema.
- Con apoyo del documento teórico 1 “Prueba en matemáticas” indica las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales que fueron necesarios para tu solución.

Nombre: _____

Fecha: _____ Género: _____

Problema 2. Sea \overline{AB} un segmento cualquiera y P un punto que pertenece a una recta L , que es perpendicular a \overline{AB} en su punto medio. Prueba que $d(P, A) = d(P, B)$.

- a. Describe detalladamente el proceso de solución indicando los conceptos y propiedades geométricas utilizadas, así como las construcciones auxiliares que realices, en caso de ser necesarias, para resolver el problema.
- b. Con apoyo del documento teórico 1 “Prueba en matemáticas” indica las aprehensiones operativas, aprehensiones discusivas y procesos configurales que fueron necesarios para tu solución.

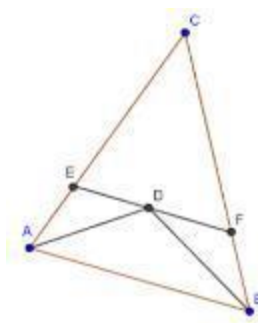
Anexo 4. Problema de probar 3 y 4

Nombre: _____

Fecha: _____

Género: _____

Problema 3. En el triángulo de la figura D es el Incentro y \overline{EF} es paralelo a \overline{AB} . Prueba que $\overline{EF} = \overline{AE} + \overline{BF}$



- c. Describe detalladamente el proceso de solución indicando los conceptos y propiedades geométricas utilizadas, así como las construcciones auxiliares que realices, en caso de ser necesarias, para resolver el problema.
- d. Con apoyo del documento teórico 1 “Prueba en matemáticas” indica las aprehensiones operativas, aprehensiones discusivas y procesos configurales que fueron necesarios para tu solución.

Nombre: _____

Fecha: _____ Género: _____

Problema 4. Sean dos circunferencias de centros A y B respectivamente, secantes en dos puntos distintos C y H . Por C se traza una paralela al segmento AB , que corta a las circunferencias en los puntos D y E . Prueba que \overline{DE} es dos veces \overline{AB}

- a. Describe detalladamente el proceso de solución indicando los conceptos y propiedades geométricas utilizadas, así como las construcciones auxiliares que realices, en caso de ser necesarias, para resolver el problema.
- b. Con apoyo del documento teórico 1 “Prueba en matemáticas” indica las aprehensiones operativas, aprehensiones discursivas y procesos configurales que fueron necesarios para tu solución.

Anexo 5. Tareas profesionales

Nombre: _____

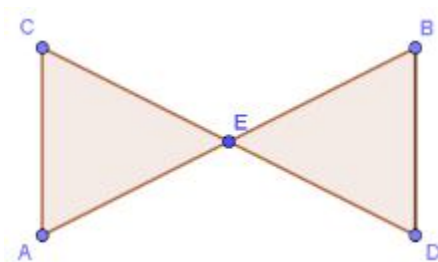
Fecha: _____

Género: _____

TAREA PROFESIONAL

A continuación, se presentan situaciones de enseñanza de la prueba en geometría. Analiza cada situación y responde lo que se solicite.

Enunciado. En la figura siguiente se verifica que el segmento \overline{AC} es congruente con el segmento \overline{DB} y el segmento \overline{CD} es congruente con el segmento \overline{AB} . Probar que $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos congruentes



PROFESOR.- *en el problema número 8 siguiente tienes que corregir la tesis ya que solo podemos deducir que $\angle A$ es congruente con $\angle D$*

ALUMNO.- *Yo lo he hecho y se puede probar que los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ son congruentes, puesto que los segmentos AB y CD se bisecan...*

a) Explica el razonamiento construido por el alumno

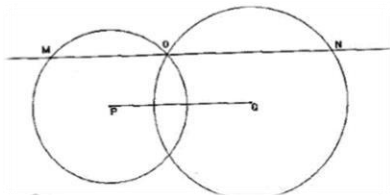
b) ¿Cómo responderías ante la respuesta proporcionada por el alumno?

Nombre: _____

Fecha: _____ Género: _____

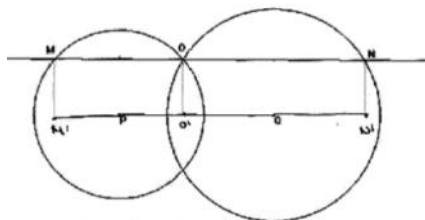
Enunciado. Dos circunferencias secantes tienen por centros P y Q . Por uno de los puntos de corte O se traza una recta paralela al segmento PQ , que interseca a las circunferencias en los puntos M y N . Demuestra que $MN = 2PQ$

Respuesta estudiante 1.



La recta PQ une a los dos radios y la recta MN tiene la misma distancia que los diámetros de las circunferencias. Como el diámetro mide el doble que el radio, la recta MN tiene que medir el doble que PQ .

Respuesta estudiante 2.



Yo creo que de M' a P se forma una línea que mide lo mismo que de P a O' y que de Q a N' se forma una línea igual a la que va de Q a N' se forma una línea igual a la que va de Q a O' . Se forma como una recta que mide lo mismo que la que va de P a Q . No demuestro nada al decir esto, pero yo creo que es así

- a) Justifica desde el modelo del Razonamiento Configural si las respuestas de los estudiantes dan solución al problema de probar.

Justificación a la respuesta del estudiante 1

Justificación a la respuesta del estudiante 2

- b) Diseña una secuencia de al menos tres tareas, para guiar a cada uno de los estudiantes, 1 y 2, hacia la solución del problema de probar. Justifica las secuencias diseñadas.

Secuencia de tareas para el estudiante 1

Secuencia de tareas para el estudiante 2